17. ročník, úloha VI . 1 ... *třesk* *(4 body; průměr 0,86; řešilo 21 studentů)*

Střílíme střelou s počáteční rychlostí v_0 z výšky h nad povrchem Země na kovovou stěnu ve vzdálenosti L. Pod jakým úhlem α (viz obr. 1) máme střílet, abychom co nejdříve slyšeli náraz? *Úloha z archivu (6. ročník, 2. série).*

Nejprve vypočítáme čas, za který doletí zvuk z výšky H na desce k pozorovateli vzdálenému L od desky. Uvažujme, že se ve stěně jde zvuk z výšky H do výšky y a potom putuje vzduchem vzdálenost $s = \sqrt{L^2 + y^2}$. Doba, za jak dlouho to zvládne, je

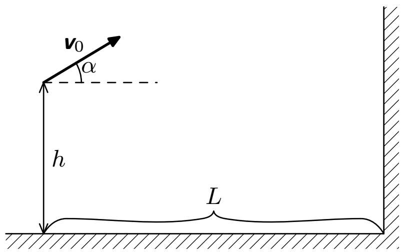
$$t_\mathrm{z} = \frac{(H - y)}{c_1} + \frac{\sqrt{L^2 + y^2}}{c_0},$$

kde c_0 je rychlost zvuku ve vzduchu a c_1 je rychlost zvuku ve stěně. Musíme ještě zjistit pro jaké y je tato doba nejmenší

$$\frac{\mathrm{d}t_\mathrm{z}}{\mathrm{d}y} = -\frac{1}{c_1} + \frac{y}{c_0\sqrt{L^2 + y^2}} = 0.$$

Takže řešení je $y = (c_0/c_1)s$, což po úpravách dává

$$\sqrt{s} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{c_0}{c_1}\right)^2}} L.$$



Obr. 1. Střelnice

z čehož je vidět, že s závisí jen na L, a nezávisí na H. Čas, za který dojde k pozorovateli první zvuk, je

$$t_\mathrm{z} = \frac{1}{c_1}H + \left(1 - \frac{c_0^2}{c_1^2}\right)\frac{s}{c_0}.$$

Jelikož chceme najít úhel, pro který bude čas minimální, a na úhlu závisí jen H a ne s, tak stačí uvažovat $t_\mathrm{z} = (H/c_1) + t_0$, kde t_0 by byla v případe zadaných rychlostí a vzdáleností desky pouze nějaká konstanta.

Ještě musíme vyřešit dobu, za kterou dopadne střela na desku. Tento proces budeme brát jako šikmý vrh. Při počáteční rychlosti v_0 a úhlu α bude doba doletu $t_\mathrm{s} = L/(v_0 \cos\alpha)$, přičemž střela doletí do výšky

$$H = L \operatorname{tg}\alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2}\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Tady si ještě musíme uvědomit, že nás bude zajímat hloubka a ne výška doletu, neboť v případě výšky bychom museli dát střele větší vertikální rychlost na úkor horizontální oproti případu se stejnou hloubkou, a doba, za jakou zvuk dojde k pozorovatelí, nezávisí na tom, jestli to je hloubka nebo výška.

Takže musíme brát předcházející vztah s opačným znaménkem. Teď jsme již schopni určit celkový čas $t = t_\mathrm{z} + t_\mathrm{s}$, který chceme minimalizovat v závislosti na úhlu α. To provedeme zderivováním podle tohoto úhlu a položením derivace rovné nule

$$\frac{\mathrm{d}t}{\alpha} = \frac{L\sin\alpha}{v_0\cos^2\alpha} - \frac{L}{c_1\cos^2\alpha} + \frac{L^2 g\sin\alpha}{v_0^2 c_1\cos^3\alpha} = 0.$$

To sa dá přepsat na rovnici

$$-v_0^2 \cos\alpha + Lg \sin\alpha + c_1 v_0 \cos\alpha \sin\alpha = 0.$$

Tato rovnice se už nedá jednoduše řešit, proto se spokojíme s takovýmto výsledkem. Ještě pro zajímavost, když uvažujeme rychlost střely o hodně nižší než rychlost zvuku ve stěne (což je dost rozumný předpoklad), tak nám budou vycházet malé úhly. Takže můžeme udělat přiblížení $\alpha \ll 1$ a potom jsme schopni tuto rovnici vyřešit jako

$$\alpha = \frac{v_0^2}{Lg + v_0 c_1}.$$

Miro Kladiva
`fykos@mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.