

17. ročník, úloha V.1 ... mašššinka (4 body; průměr 2,11; řešilo 18 studentů)

Máme rotující desku, která se otáčí úhlovou rychlostí ω kolem své osy a na ní nepůsobí žádné vnější momenty sil. Směrem do jejího středu jede lokomotiva o hmotnosti m po kolejkách připevněných k desce. Deska mění svou rychlost otáčení. Určete původ, velikost a směr momentu síly, který tuto změnu způsobí. Na zkoušce z Fyziky I dostal Honza Prachař.

O tom, že se bude úhlová rychlost otáčení desky zvyšovat, se můžeme přesvědčit ze zákona zachování momentu hybnosti. Součin $L = J\omega$ musí být konstantní, proto se při snížení celkového momentu setrvačnosti soustavy zvětší hodnota úhlové rychlosti. Zákon zachování energie nelze pro vysvětlení jevu použít. Mašššinka totiž překonává odstředivou sílu a její motory konají práci. Označme rychlost mašinky z hlediska vnějšího pozorovatele \mathbf{v} a z hlediska pozorovatele v rotující soustavě \mathbf{v}' . Tyto rychlosti se liší o obvodovou rychlost.

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (1)$$

Zrychlení, které působí na mašššinku, určíme jako časovou derivaci rychlosti \mathbf{v}' v čárkované (rotující) soustavě.

$$\mathbf{a}' = \frac{d'\mathbf{v}'}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'.$$

Za \mathbf{v}' v prvním členu dosadíme z (1) a upravíme

$$\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'.$$

Nyní dosadíme z (1) za \mathbf{v}' .

$$\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'.$$

Protože $\boldsymbol{\omega}$ má směr osy otáčení a \mathbf{v}' směr opačný k \mathbf{r} , budou první dva sčítance tvořit normálové zrychlení a druhé dva tečné (můžete si to rozmyslet z vlastností vektorového součinu). Síla, která působí na mašššinku kolmo ke kolejkám, má směr stejný jako otáčení desky a velikost

$$F_t = -m \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} r + 2m\boldsymbol{\omega}v.$$

Mašššinka působí stejně velkou silou na desku, protože jede po kolejkách. Moment, kterým působí na desku je roven derivaci momentu hybnosti desky L_d . Pro jejich velikosti platí

$$\begin{aligned} M &= F_t r = -m \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} r^2 + 2m\boldsymbol{\omega}vr, \\ M &= \frac{dL_d}{dt} = J \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}, \end{aligned} \quad (2)$$

odtud

$$0 = -2m\boldsymbol{\omega}vr + (J + mr^2) \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt} (J + mr^2) \boldsymbol{\omega} = \frac{dL}{dt}.$$

Tato rovnice není nic jiného než zákon zachování momentu hybnosti. Z ní dostaneme

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{2mvr\boldsymbol{\omega}}{J + mr^2}.$$

Moment síly, který desku roztáčí, určíme dosazením do (2) za $d\omega/dt$, získáváme

$$M = \frac{J}{J + mr^2} \cdot 2mvr\omega.$$

Směr momentu síly je shodný se směrem vektoru $\boldsymbol{\omega}$.

Jirka Lipovský

`jirka@fykos.mff.cuni.cz`