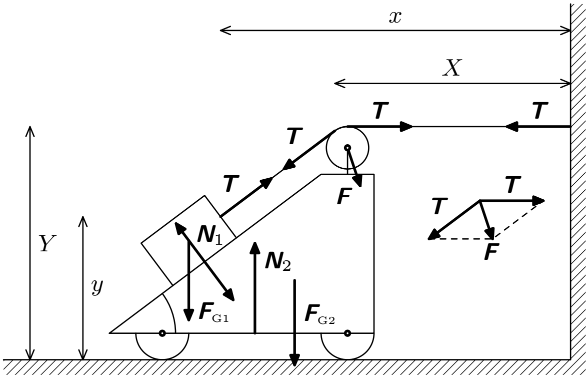
17. ročník, úloha IV . 3 ... *cihla na klínu* *(4 body; průměr 1,73; řešilo 45 studentů)*

Na obr. 1 je soustava dvou těles. Těleso o hmotnosti m, které je přivázáno ke zdi ideálním lanem, leží v klidu na malém klínu o hmotnosti M. Tření mezi tělesy je nulové a klín se pohybuje bez odporu. Určete zrychlení klínu. *Z emailové konference MFO zná Honza Prachař.*



Obr. 1. Cihla a klín

Úlohu budeme řešit pomocí Newtonových pohybových rovnic. Začněme proto tím, že popíšeme všechny síly, které na vozík ve tvaru klínu a na cihlu působí. Síly jsou znázorněny na obrázku 1. Na cihlu působí tíhové pole silou F_{G1}, na vozík normálovou silou N_1 a na lano silou T. Podle zákona akce a reakce bude cihla působit na vozík silou N_1. Dále na vozík působí tíhové pole silou F_{G2}, podložka, po které vozík jezdí, silou N_2 a konečně lano silou F. Síla F pochází od ohybu lana na kladce, určíme ji jako výslednici sil na kladce (viz obr. 1). Ve svislém a vodorovném směru platí

$$F_y = T\sin\alpha,$$

$$F_x = T(1-\cos\alpha).$$

Odtud pro velikost síly F dostáváme

$$F = 2T\sin\frac{\alpha}{2},$$

její odklon od svislého směru je $\alpha/2$.

Polohu cihly a vozíku popišme souřadnicemi zobrazenými na obrázku 1. Polohu cihly určuje vzdálenost od stěny x a vzdálenost od podlahy y. Podobně pro vozík máme souřadnice X a Y. Přistupme nyní k sestavení čtyř pohybových rovnic, pro každé těleso dvě (ve svislém a vodorovném směru). Zrychlení cihly označme a a zrychlení vozíku A. Při sestavování pohybové rovnice ve svislém resp. vodorovném směru dáme na levou stranu rovnice zrychlení tělesa vynásobené jeho hmotností a na pravou stranu složky sil působících na těleso do svislého resp. vodorovného směru (při tom dáváme pozor na směr sil).

$$ma_x = -T\cos\alpha + N_1\sin\alpha,$$

$$ma_y = N_1\cos\alpha - mg + T\sin\alpha,$$

$$MA_x = -N_1\sin\alpha - F_x,$$

$$MA_y = -Mg - N_1\cos\alpha + N_2 - F_y.$$

Máme tedy čtyři rovnice pro sedm neznámých a_x, a_y, A_x, A_y, T, N_1 a N_2. Budeme k nim proto muset přidat další tři rovnice, jedná se o vazbové podmínky. Pohyb těles totiž není volný. Vozík se pohybuje po podlaze, platí

$$Y = \text{konst.}, \quad \text{neboli} \quad A_y = 0.$$

Dále předpokládejme, že cihla leží na klínu (později se dozvíme, že tomu tak nemusí být)

$$\frac{Y - y}{x - X} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \text{neboli} \quad \frac{A_y - a_y}{a_x - A_x} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Konečně délka lana je konstantní

$$X + \frac{x - X}{\cos\alpha} = \text{konst.}, \quad \text{neboli} \quad A_x + \frac{a_x - A_x}{\cos\alpha} = 0.$$

Nyní již máme sedm rovnic pro sedm neznámých. Jejich vyřešení je jen technickou otázkou, proto nebudeme výpočet uvádět. Po vyřešení dostaneme

$$A_x = -\frac{mg\sin\alpha}{M + 2m(1 - \cos\alpha)},$$

což je hledané zrychlení vozíku ve vodorovném směru (má znaménko mínus, protože souřadnice X míří ode zdi). Normálová síla, kterou působí cihla na vozík, je

$$N_1 = \frac{mg(m(3 + \cos 2\alpha) - 2(2m + M)\cos\alpha)}{4m\cos\alpha - 2(2m + M)}.$$

Nyní se zamysleme, jestli je možné, aby cihla neležela na klínu, ale vznášela se. Pokud bude vozík lehký vůči cihle, může se stát, že síla F bude klín urychlovat natolik, že cihla nebude „stačit“ a bude se vznášet za klínem. Pokud bude zrychlení vozíku konstantní, bude také úhel odklonu lana od vodorovné roviny β konstantní. Jelikož se cihla již nedotýká vozíku, je normálová síla N_1 v pohybových rovnicích nulová. Ve všech rovnicích bude místo α úhel β. Máme tedy následující soustavu sedmi rovnic

$$\begin{aligned}
ma_x &= -T\cos\beta,\\
ma_y &= -mg + T\sin\beta,\\
MA_x &= -T(1 - \cos\beta),\\
MA_y &= -Mg + N_2 - T\sin\beta,\\
0 &= A_y,\\
\operatorname{tg}\beta &= \frac{A_y - a_y}{a_x - A_x},\\
0 &= A_x + \frac{a_x - A_x}{\cos\beta}
\end{aligned}$$

pro sedm neznámých a_x, a_y, A_x, A_y, N_2, T a β. Po vyřešení dostáváme jediné A_x, které má fyzikální smysl

$$A_x = -\frac{g}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2m + M}{\sqrt{M(4m + M)}} - 1},$$

a úhel odklonu

$$\cos\beta = 1 - \frac{\sqrt{M(4m+M)} - M}{2m}.$$

Zbývá určit, za jakých podmínek se bude cihla takto vznášet. Zřejmě musí být $\beta < \alpha$, tedy

$$\cos\alpha < \cos\beta = 1 - \frac{\sqrt{M(4m+M)} - M}{2m},$$

po úpravě dostaneme podmínku

$$\frac{m}{M} > \frac{\cos\alpha}{(1-\cos\alpha)^2}.$$

Hmotnost cihly by musela být pro menší úhly α výrazně větší než hmotnost vozíku, což jsme očekávali.

Na problém se můžeme rovněž dívat z hlediska zákona zachování energie, neboť v soustavě nepůsobí žádné třecí síly a síla, kterou působí zeď na lano, nekoná práci. Potenciální energie cihly se mění na kinetickou energii cihly a klínu. Pokud se klín přiblíží ke zdi o vzdálenost ΔX, prodlouží se lano mezi kladkou a cihlou rovněž o ΔX. Z geometrických vlastností vozíku plyne, že poloha cihly se změní

$$\Delta x = \Delta X(1-\cos\alpha), \qquad \Delta y = \Delta X \sin\alpha. \tag{1}$$

Cihla v soustavě spojené se zemí tedy urazí vzdálenost

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta X\sqrt{2(1-\cos\alpha)}. \tag{2}$$

Napišme si zákon zachování energie

$$mg\Delta y = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{\Delta X}{\Delta t}\right)^2$$

a dosaďme do něj z (1) a (2). Po úpravě dostaneme

$$\frac{\Delta X}{2(\Delta t)^2} = \frac{mg\sin\alpha}{M + 2m(1-\cos\alpha)}.$$

Na pravé straně máme vztah pro zrychlení klínu, neboť $\Delta X = A(\Delta t)^2/2$. Dostali jsme samozřejmě to samé jako při použití Newtonových rovnic.

Poznámky k došlým řešením. Výsledky této úlohy nejsou příliš uspokojivé. Dorazilo jen jedno správné řešení, a to od *Matouše Ringela*. Plným počtem bodů jsem hodnotil i řešení, která opomněla možnost, že se cihla „vznáší“ (předpokládali tedy $M \gg m$), ale jinak byla správná. Skoro všichni řešitelé, kteří použili zákon zachování energie, byli úspěšní a vysloužili si tak plný počet bodů. Ostatním, kteří používali Newtonovy pohybové zákony, se až na výjimky ani nepodařilo správně určit všechny síly.

Honza Prachař
`honzik@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.