

**17. ročník, úloha IV. 1 ... stavový výťah** (4 body; průměr 2,86; řešilo 37 studentů)

Mějme uzavřenou visle postavenou válcovou nádobu s pohyblivým pístem, jehož hmotnost nemůžeme zanedbat. Při teplotě  $t = 0^\circ\text{C}$  je objem plynu nad pístem dvakrát větší než objem plynu pod pístem. Určete poměr objemů plynů při teplotě  $t = 100^\circ\text{C}$ , víte-li, že jejich látková množství jsou stejná. Ze cvičení Fyziky I zná Jirka Lipovský.

Označme při počáteční teplotě  $T$  objem plynu nad resp. pod pístem  $V_1$  resp.  $V_2$  a tlak nad resp. pod pístem  $p_1$  resp.  $p_2$ . Obdobně označme všechny čárkované veličiny při konečné teplotě  $T'$ . Píst svou tíhou vytváří tlak v dolní části válce, který závisí pouze na hmotnosti pístu. Rozdíl tlaků v dolní a horní části nádoby musí být proto v každém okamžiku stejný.

$$p_2 - p_1 = p'_2 - p'_1. \quad (1)$$

Ze zadání úlohy víme, že

$$V_1 = 2V_2, \quad (2)$$

a hledáme konstantu  $k$  takovou, aby

$$V'_1 = kV'_2. \quad (3)$$

Pro oba plyny platí stavová rovnice

$$pV = nRT,$$

kde  $R$  je univerzální plynová konstanta a  $n$  je látkové množství plynu. Jelikož víme, že látková množství plynů nad a pod pístem jsou stejná, můžeme psát

$$\frac{p_1 V_1}{T} = \frac{p_2 V_2}{T} = \frac{p'_1 V'_1}{T'} = \frac{p'_2 V'_2}{T'}. \quad (4)$$

Z předchozí rovnice můžeme vyjádřit

$$\begin{aligned} p_2 &= 2p_1, \\ p'_2 &= kp'_1 \end{aligned}$$

a po dosazení do (1) dostáváme

$$p_1 = (k - 1)p'_1. \quad (5)$$

Zřejmě se součet objemů jednotlivých částí nemění.

$$V_1 + V_2 = V'_1 + V'_2.$$

Dosadíme-li za  $V_2$  a  $V'_2$  z (2) resp. (3), dostáváme

$$V_1 = \frac{2(k+1)}{3k} V'_1. \quad (6)$$

Vynásobíme-li nyní levé a pravé strany rovnic (6) a (5), získáváme

$$p_1 V_1 = \frac{2(k+1)(k-1)}{3k} p'_1 V'_1.$$

Dosadíme-li za poměr  $\frac{p_1 V_1}{p'_1 V'_1}$  ze stavové rovnice (4) výraz  $\frac{T}{T'}$ , můžeme předchozí vztah upravit na kvadratickou rovnici

$$k^2 - \frac{3T}{2T'}k - 1 = 0.$$

Fyzikální význam má pouze její kladný kořen, který po dosazení zadaných hodnot teplot vychází  $k = 1,69$ . Píst tedy vystoupí o kousek nahoru, protože s rostoucí teplotou se snižuje význam jeho příspěvku k tlaku ve spodní části válce (tlak plynu se s rostoucí teplotou zvyšuje, tlak způsobený hmotností pístu zůstává stejný).

*Jirka Lipovský*

`jirka@fykos.mff.cuni.cz`