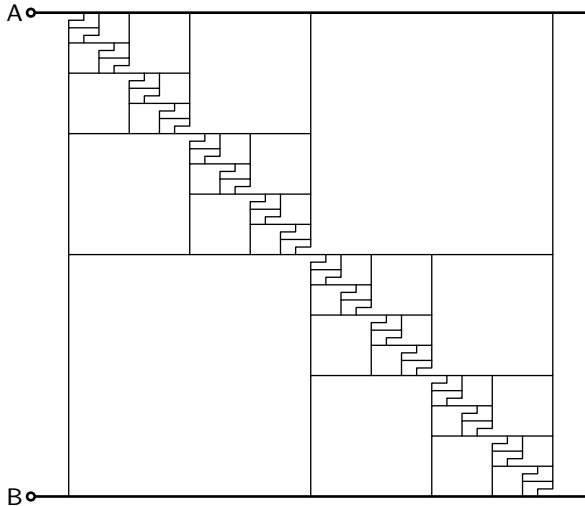


17. ročník, úloha III. 3 ... odporová síť (3 body; průměr 2,48; řešilo 27 studentů)

Jaký je odpor mezi body A a B odporové sítě na obrázku 1? Svislé úsečky mají odpor R a vodorovné odpor nemají. Síť je nekonečná, na obrázku je z technických důvodů jen konečná iterace.



Obr. 1. Nekonečná odporová síť

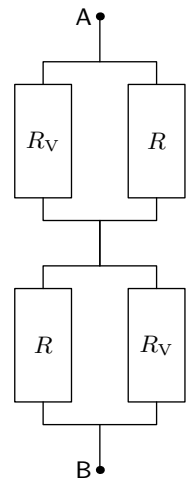
Vynalezl Pavel Augustinský pro Bělčickou olympiádu.

Protože je odporová síť nekonečná, víme, že část celé odporové sítě má tentýž elektrický odpor jako celá síť. Zjednodušeně můžeme celou situaci překreslit do obrázku 2. Výsledný odpor R_V mezi body A a B je dle obrázku roven

$$R_V = 2 \frac{RR_V}{R + R_V}.$$

Odsud dostáváme kvadratickou rovnici s kořeny 0 a R . Dokažme, že hledaný odpor není roven 0. Při provádění jednotlivých iterací odpor nikdy neklesne pod R . Odpor první iterace je zřejmě roven $2R$ a odpor dalších iterací klesá monotónně k R . V jednotlivých krocích vždy sériově spojujeme 2 stejná zapojení. Toto zapojení zkonstruujeme jako paralelní zapojení předchozí iterace a odporu R . Paralelní zapojení dvou rezistorů o odporech R a odporu větší než R je ekvivalentní odporu, který má odpor větší než $R/2$. A sériové spojení dvou takovýchto zapojení je větší než R . Jelikož je první iterace větší než R , a pak i každá další větší, nebo rovna R , nemůže odpor žádné iterace klesnout pod R . Výsledný odpor celé odporové sítě je roven R .

Byla i jiná možnost jak řešit tuto úlohu. Představte si tenký plechový čtverec o odporu R . Pokud z téhož materiálu vyrobíme čtverec o jiné délce strany, bude jeho odpor opět R , neboť jeho průřez se zmenší sice dvakrát, ale jeho délka také. Nyní vyšetřujeme odpor plechového čtverce mezi jeho protilehlými stranami (ten je dle předpokladu R). Pokud čtverec jakkoli



Obr. 2

rozřežeme, nezmění se jeho odpor. Samozřejmě nesmíme rozřezané kusy od sebe oddělit a stejně tak předpokládáme, že se vše chová naprosto ideálně a nikde nevznikají přechodové odpory. Rozdělíme ho na čtverce, tedy každá část, ze které pak budeme moci čtverec zpět poskládat, má odpor R . Takto rozřezaný čtverec můžeme reprezentovat elektrickou sítí složenou z odporů velikosti R , přičemž využijeme, že místa se stejným potenciálem nemusí být spojena vodičem (proud by mezi nimi stejně netekl). Pokud budeme správným způsobem nekonečněkrát dělit čtverec, můžeme získat stejnou odporovou síť jako byla v zadání. Při jednotlivém čtvrcení budeme postupovat tak, že vždy po rozříznutí čtverce na čtvrtiny se nebudeme více starat o levou dolní část a horní pravou část. Nadále budeme do nekonečna pokračovat v krájení zbylých „zajímavých“ částí stejným způsobem. Tento postup zcela odpovídá zapojení v zadání. Na obrázku můžete vidět 2. krok tohoto postupu a jemu odpovídající zapojení. Bílé čtverce se budou ještě dále dělit, ale šedé už zůstanou tak, jak jsou. Všechny rezistory na obrázku mají odpor R . Protože má celý čtverec odpor R (stejně tak všechny „malé“ čtverce), má i zadaná síť odpor R .

Nakonec ještě taková malá poznámka. Uvědomme si, že nezáleží na tom, jak velký odpor leží na úhlopříčce odporové sítě. Pokud totiž zpodrobňujeme schéma zapojení směrem dovnitř – jakoby se přibližujeme k síti a zkoumáme, co se nachází na úhlopříčce – zjišťujeme, že namísto rezistoru o nekonečném odporu nalézáme znovu tutéž odporovou síť, jako jsme viděli předtím.

Karel Tůma

kajinek@fykos.mff.cuni.cz