

17. ročník, úloha III. 2 ... cvrnkání kuliček (4 body; průměr 1,52; řešilo 31 studentů)

Organizátoři FYKOSu hráli kuličky. Po chvíli si všimli, že když se treťi do prázdné kulové jamky, kulička na dně kmitá kolem rovnovážné polohy. Určete frekvenci těchto malých kmitů. Jamka má poloměr R , poloměr kuličky je r a její hmotnost je m . Smykové tření mezi kuličkou a povrchem jamky je dostatečně veliké, aby při kutálení nedocházelo k prokluzování. Nápověda: je-li φ malé, můžete použít rovnost $\sin \varphi = \text{tg } \varphi = \varphi$ a analogii s pohybem kyvadla.

Zadal Honza Prachař inspirován na cvičeních z Fyziky I.

Pro kuličku platí zákon zachování energie. K potenciální energii a kinetické energii hmotného středu přibude také rotační energii kuličky.

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} + mgh = \text{konst.}, \quad (1)$$

kde h je výška těžiště nad nejnižší polohou, ω je úhlová rychlost otáčení kuličky a J je moment setrvačnosti kuličky vůči ose procházející těžištěm. Výšku h můžeme vyjádřit pomocí úhlu φ

$$h = (1 - \cos \varphi)(R - r),$$

kde pro malé úhly φ můžeme za $\cos \varphi$ dosadit výraz $1 - \frac{\varphi^2}{2}$ (φ bereme v radiánech).

$$h = (R - r) \frac{\varphi^2}{2}.$$

Oblouk kružnice můžeme nahradit souřadnicí kuličky x , proto z definice úhlu plyne $\varphi = \frac{x}{R-r}$. Dosadíme-li do (1) také za moment setrvačnosti kuličky $J = \frac{2}{5}mv^2$ a za její úhlovou rychlost $\frac{v}{r}$, dostáváme

$$\frac{7}{10}mv^2 + m \frac{gx^2}{2(R-r)} = \text{konst.}$$

Pokud obě strany rovnice zderivujeme, dostáváme

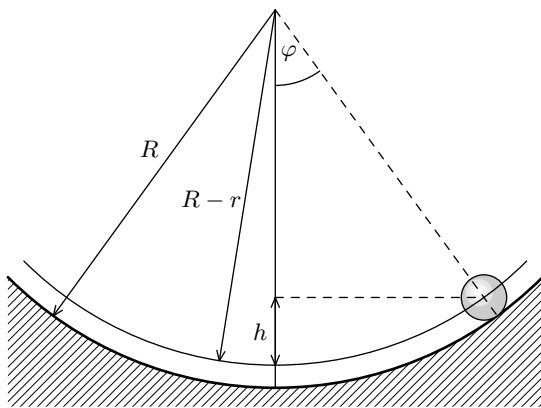
$$\frac{7}{5}m\dot{x}\ddot{x} + \frac{mgx\dot{x}}{R-r} = 0.$$

Zkrátíme-li vyzraz u \dot{x} , obdržíme rovnici

$$\ddot{x} + \frac{5g}{7(R-r)}x = 0. \quad (2)$$

Nyní dojde na analogii se závažíčkem na proužince, kterou jsme zmínili v zadání. Napišme si tedy pohybovou rovnici závažíčka

$$ma = -kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$



Obr. 1

Tato rovnice je formálně stejná s naší rovnicí (2) pro kuličku v jamce. Rovnicím, které mají tento tvar, říkáme rovnice harmonických kmitů. Konstanta před x je druhá mocnina úhlové frekvence soustavy. V našem případě je

$$\Omega = \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}.$$

úhlová frekvence kmitání kuličky. Frekvenci f těchto kmitů už vyjádříme ze známého vztahu

$$f = \frac{\Omega}{2\pi} = 2\pi \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}.$$

Jirka Lipovský

`jirka@fykos.mff.cuni.cz`