17. ročník, úloha III . 1 ... na oběžné dráze *(3 body; průměr 2,40; řešilo 52 studentů)*

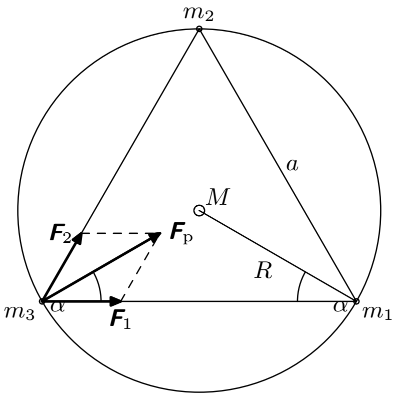
Tři stejné družice obíhají po kružnici kolem malé planetky rychlostí v tak, že jsou neustále ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka. Určete jejich hmotnost, která není zanedbatelná vůči hmotnosti planetky. *Úlohu navrhl Honza Prachař.*

Na planetku gravitačně působí tři objekty. Planeta ve středu a dvě planetky ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku. Výsledná síla působící na planetku m_3 od planetek m_1 a m_2 je

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \varkappa\,\frac{m_1 m_3}{a^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}_{1,3}}{|\boldsymbol{r}_{1,3}|} + \varkappa\,\frac{m_2 m_3}{a^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}_{2,3}}{|\boldsymbol{r}_{2,3}|}.$$

Jelikož $m_1 = m_2 = m_3 = m$, pak předchozí rovnici můžeme přepsat na tvar

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{p} = 2\varkappa\,\frac{m^2}{a^2}\cos\alpha.$$



Obr. 1

Centrální planeta působí na planetku m_3 silou

$$F_\mathrm{M} = \varkappa\,\frac{mM}{R^2}.$$

Výsledná síla působící na naši planetku je

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_\mathrm{M} + \boldsymbol{F}_\mathrm{p} = \varkappa\frac{mM}{R^2} + 2\varkappa\frac{m^2}{a^2}\cos\alpha\,, \tag{1}$$

protože směry $\boldsymbol{F}_\mathrm{p}$ a $\boldsymbol{F}_\mathrm{M}$ jsou oba totožné a směřují k centrální planetě.

Vyjádříme vzdálenost a pomocí R.

$$a = 2R\cos\alpha = 2R\cos 30^\circ = R\sqrt{3}.$$

Pak rovnice (1), vyjadřující celkovou gravitační sílu působící na m_3, nabývá tvaru

$$F = \varkappa\frac{mM}{R^2} + 2\varkappa\frac{m^2}{3R^2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \varkappa\frac{mM}{R^2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{m}{M}\right).$$

Tato síla musí být vyvážena odstředivou silou, proto

$$\frac{mv^2}{R} = \varkappa \frac{mM}{R^2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{m}{M}\right)$$

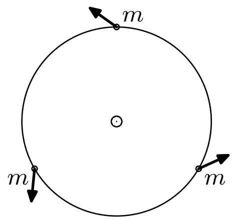
$$m = \sqrt{3}\,\frac{v^2R - \varkappa M}{\varkappa}.$$

Závěrem:

a) Nebudeme zkoumat, jak se čtyři tělesa dostaly do této rovnovážne polohy. Domnívám se, že to jde velice těžko a jenom za pomoci dalších těles.

b) Jestliže planetky obíhají kolem centrální planety ve vrcholu rovnostranného trojúhelníka, pak nutně nemusí obíhat po kružnici. Stačí, když v některém okamžiku budou vektory rychlosti a hybnosti stejné (v jedné rovině) a planetky se budou nacházet ve vrcholu rovnostranného trojúhelníka (přičemž v soustavě nesmí být žádné další těleso). Křivka, po které budou obíhat kolem centrálního tělesa, nebude elipsa, rozmyslete si proč.

Dokonce není nutné aby planetky obíhaly v jedné rovině. Příkladem buď velice hmotné centrální těleso a nehmotné planetky, jejichž dráhy se protínají v jednom bodě, jsou v tomto bodě ve stejný okamžik a jejich dráhy jsou vůči sobě pootočeny o 60°.



Obr. 2

c) Není možné použít Keplerovy zákony. Ty byly odvozeny jenom pro dvě tělesa, ne pro tři nebo více.

Pavol Habuda
bzuco@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.