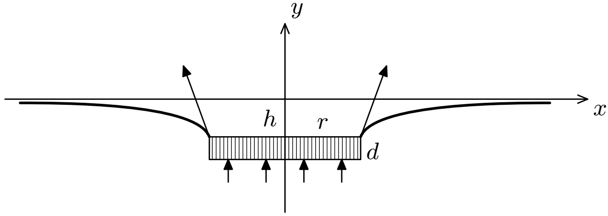
17. ročník, úloha II . P ... devalvace měny *(5 bodů; průměr 2,61; řešilo 33 studentů)*

Pokuste se spočítat, jak velká hliníková mince se ještě udrží na vodní hladině.

Navrhl Honza Houštěk.

Přestože se to na první pohled může jevit překvapivé, i hliníková mince o hustotě větší než voda může plavat na hladině. Klíčem k tomuto jevu je jak jinak než povrchové napětí vody.

Na obr. 1 je zakresleno, jak taková plavající mince vypadá. Tloušťku mince jsme označili d, její poloměr r a hloubku horní strany pod úrovní hladiny h. Na dolní stranu mince působí hydrostatický tlak vody a na horním obvodě povrchová síla vody.



Obr. 1. Síly působící na plavající minci

Spočítat tlakovou sílu je při znalosti h snadné, $F_p = S\varrho g(d+h)$, kde S je plocha mince. Jak se ukáže, stanovení h bude tím nejobtížnějším problémem. Velikost povrchové síly spočteme snadno, $F_\sigma = l\sigma$, kde l je obvod mince. Ve vzorci by měl vystupovat ještě nějaký úhlový člen. S tím je trochu problém, stanovení úhlu, pod kterým je mince smáčená, není jednoduché, navíc by záleželo na konkrétním tvaru okraje mince a do hry by vstoupilo i povrchové napětí na rozhraní voda-mince. Jak se ale ukáže, bude nakonec možné sílu F_σ zanedbat, proto se problémy s úhlem smáčení zabývat nebudeme.

Plavání mince je umožněno schopností hladiny prohnout se a udržet určitý tlakový rozdíl. Tlak je jak víme přímo úměrný křivosti povrchu, konstantou úměrnosti je povrchové napětí σ. Budeme-li předpokládat $r \gg h$, můžeme zanedbat zakřivení dané kruhovým tvarem mince. Je třeba tedy najít tvar hladiny $y(x)$ tak, aby v každém bodě platilo[1] $\sigma/r = \varrho g y$. Na základě výsledku pak stanovíme maximální hodnotu h.

Pro matematicky náročného čtenáře provedeme tento výpočet níže. I bez výpočtů můžeme provést následující úvahu. Výsledná maximální hodnota h bude záviset jen na hodnotách σ, ϱ, g a ne na parametrech mince. Až na multiplikativní konstantu existuje jediný způsob, jak z těchto tří hodnot sestavit veličinu s rozměrem délky,

$$a = \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho g}} = 2{,}7\,\mathrm{mm}.$$

Hledaná maximální hodnota h bude jen nějakým násobkem a. Z toho, že h nezávisí na velikosti mince je vidět, že plavat může libovolně velká mince, její tíha i tlaková síla jsou úměrné její ploše. Stačí, aby tloušťka mince byla

$$d < \frac{\varrho}{\varrho' - \varrho} \cdot h_{\max},$$

kde ϱ' je hustota mince. Pro hliník to je asi $0{,}6 \cdot h_{\max}$. Spolu s odhadem $h_{\max} \sim a$ už máme docela slušný výsledek.

[1] Vzorec platí včetně znaménka, křivost $1/r$ konkávní funkce bereme záporně.

Uvažovali jsme ovšem pouze tlakovou sílu. Zkusme tedy porovnat velikost obou sil pro velké mince,

$$\frac{F_\sigma}{F_p} = \frac{\sigma l}{S\varrho g h_{\max}} = \gamma \cdot \frac{a}{r}.$$

$\gamma = 2a/h_{\max}$ je bezrozměrná konstanta. Pro velké mince tedy bude opravdu možné povrchovou sílu zanedbat a současně vidíme, že mírou oné „velikosti“ je právě hodnota a.

Nyní přistoupíme k výpočtu tvaru funkce $y(x)$. Diferenciální rovnici už máme téměř sestavenou, ve vztahu $\sigma/r = \varrho g y$ stačí vyjádřit křivost pomocí derivací $y(x)$,

$$\varrho g y = \sigma y'' \left(1 + y'^2\right)^{-3/2}.$$

V této rovnici nevystupuje proměnná x. Lze tedy provést transformaci $u = y'$ a hledat závislost $u(y)$. Pak totiž platí $y'' = uu'$. Tedy

$$y = a^2 uu' \left(1 + u^2\right)^{-3/2}.$$

V tomto tvaru lze rovnici snadno integrovat,

$$\frac{y^2}{2} + C = -a^2 \left(1 + u^2\right)^{-1/2}.$$

Z okrajové podmínky $u = 0$ pro $y = 0$ určíme hodnotu integrační konstanty a po úpravě dostáváme

$$y = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - (1 + u^2)^{-1/2}}.$$

Místo, kde je hladina ohnutá kolmo dolů, tj. $u = \infty$, je v hloubce $h_{\max} = a\sqrt{2}$. Někteří řešitelé uvažovali i možnost zahnutí hladiny ještě více, toto se nám ale nepodařilo (narozdíl od zbytku tvrzení) experimentálně ověřit a navíc by to stejně do výsledku nepřineslo velký rozdíl. Závěr je tedy takový, že plavat může libovolně velká hliníková mince o maximální tloušťce cca 2 mm.

Úlohu zcela vyřešil pouze *Matouš Ringel*, za což si vysloužil plný počet bodů. Několik řešitelů provedlo popsaný rozměrový odhad $h_{\max}$. Ostatní většinou skončili na tom, že místo tlakové síly působící na spodní stranu mince uvažovali vztlakovou sílu danou objemem mince. To je špatně, protože vztlaková síla je daná rozdílem tlaku pod a nad tělesem, je-li zcela obklopeno kapalinou. Zde je ale nad mincí tlak nulový, tím je ostatně umožněno její plavání.

Honza Houštěk
`honza@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.