

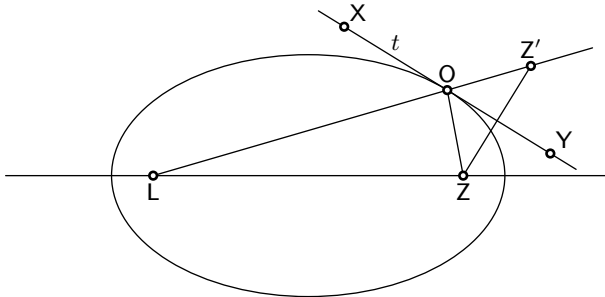
**17. ročník, úloha II. 4 ... laser** (4 body; průměr 2,19; řešilo 21 studentů)

Má-li z krystalu vycházet laserový paprsek, musíme mu dodat energii prostřednictvím záření z vnějšího zdroje. Cílem je, aby co nejvíce záření z našeho bodového zdroje bylo využito k excitaci elektronů ve velmi malém krystalu. Poradte nám, jaký ideální tvar proto musí mít odrazná plocha. Nezapomeňte své tvrzení dostatečně zdůvodnit.

*Úlohu navrhl Pavel Brom.*

Nahradíme si bodový zdroj světla a velmi malý krystal laseru body Z, L. Zákon odrazu říká:

- Úhel dopadu je roven úhlu odrazu (my uijeme rovnost k nim doplňkových úhlů).
- Paprsek po odrazu zůstává v dopadové rovině (ta je kolmá k tečné rovině v bodě odrazu O).



Obr. 1

Je jasné, že body L, Z musí ležet v dopadové rovině, ve které budeme problém dál řešit. Chceme využít co nejvíce světla, proto si nejprve položíme otázku, zda existuje křivka, která „odrazí“ všechny paprsky jdoucí z jednoho bodu do druhého. K pevně daným bodům L, Z ji zkusme odhadnout a co nejpřesněji načrtnout její tvar. Taková křivka existuje – je to elipsa.

Zkoumejme, co musí platit pro tečnu  $t$  takové křivky v bodě odrazu O. Ze zákona odrazu

$$|\angle LOX| = |\angle YOZ| = |\angle YOZ'|, \quad (1)$$

kde osová souměrnost s osou  $t$  zobrazí úsečku OZ na OZ'. Dále evidentně platí

$$|LO| + |OZ| = |LO| + |OZ'| = |LZ'|. \quad (2)$$

Nyní potřebujeme zajistit, aby množina bodů O byla spojitá. Položíme-li  $|LZ'|$  v rovnici (2) rovno konstantě, vyhovíme tak definici elipsy (množiny bodů O v rovině, která má od dvou daných ohnisek F, G konstantní součet vzdáleností), o které víme, že existuje a je spojitá. K této podmínce nás rovněž navede obecná platnost Fermatova principu, a sice, že světlo se šíří po nejkratších časových spojnicích. Žádný bod O křivky (resp. celé odrazné plochy) by neměl být kvůli Fermatovu principu preferovaný, tudíž libovolná dráha Z–O–L by měla být vždy stejně dlouhá, tj.  $|ZO| + |OL| = \text{konst.}$  Toto musí být splněno pro všechny body O v prostoru.

K důkazu přímé hypotézy, že danou křivkou je právě elipsa, stačí ukázat, že tečna elipsy v bodě O je osou úhlu ZOZ', jestliže Z' je zkonstruován na polopřímce LO tak, že  $|LZ'| = 2a = \text{konst.}$ , kde  $a$  je hlavní poloosa uvažované elipsy. Na ose úhlu (značené  $t$ ) vezměme libovolný bod X různý od O. Z osové souměrnosti s osou  $t$  plyne

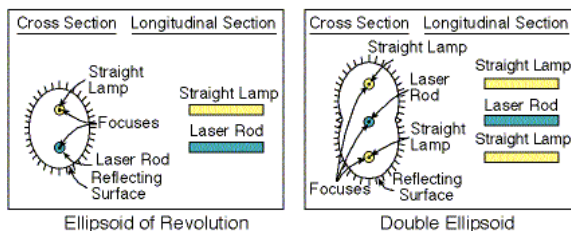
$$|XZ'| = |XZ|, \quad \text{tedy} \quad |LX| + |XZ| = |LX| + |XZ'| > |LZ'| = 2a,$$

to je trojúhelníková nerovnost v trojúhelníku  $LXZ'$ . To znamená, že žádný uvažovaný bod  $X$  osy  $t$  kromě společného bodu  $O$  není bodem elipsy (musela by nastat rovnost), tedy osa  $t$  nemůže být sečnou, proto je nutně tečnou elipsy a platí rovnost úhlů v podmínce (1).

Správné řešení úlohy zní následovně. Ideální odraznou plochou je rotační elipsoid rotující kolem své hlavní osy (nikoliv podle jiné), přičemž laser umístíme do jednoho ohniska elipsoidu a zdroj do druhého – technicky např. pomocí dutých trubiček připevněných v hlavních vrcholech. Pokud by se osy elipsy při rotování spojitě měnily (tzn. v řezech rovinami obsahujícími  $L$ ,  $Z$  bychom dostávali různé elipsy), nemohla by být tečná rovina kolmá k dopadové rovině a odražený paprsek by minul bod  $L$ . Tím jsme vyloučili obecný elipsoid.

Někteří řešitelé použili nedovolené a ohromné čočky (tzn. zařízení se zkomplikuje, prodraží). Mnozí doporučili parabolu/rotační paraboloid (za 1 bod) ze stejné rodiny křivek, ale s nižším procentem využitého světla. Nalezení elipsy (rotačního elipsoidu) bylo oceněno 3 body, přijatelný důkaz tvrzení 1 bodem. Jen 2 řešitelé nezapomněli na druhou část zákona odrazu, čímž odůvodnili, že elipsoid musí být rotační podle hlavní osy.

Objevíli jsme zajímavou vlastnost kuželoseček. Paprsky vyslané z jednoho bodu jsou odrazem změněny na rovnoběžné (paraboloid), sbíhavé (elipsoid), rozbíhavé (hyperboloid) nebo vráceny zpět (kulová plocha). Zároveň rozumíme, proč se oněm význačným bodům říká ohniska.



Obr. 2

Na závěr uvedme, že k „pumpování laserů“ se v praxi nepoužívá bodový zdroj světla, ale dokázaná vlastnost elipsy se uplatňuje pro tyčový krystal a jednu nebo dvě s ním paralelní zářivky, viz obr. 2.

*Pavel Brom*

[paja@fykos.mff.cuni.cz](mailto:paja@fykos.mff.cuni.cz)