17. ročník, úloha II . 3 ... *kulička filuta* *(4 body; průměr 1,41; řešilo 29 studentů)*

Mějme kuličku, která se volně pohybuje navlečená na drátové spirále popsané rovnicí $r = C\varphi$; r je vzdálenost od středu a φ je úhel otočení. Počáteční poloha kuličky je r_0. Spirála rotuje kolem osy procházející jejím středem a kolmé na její rovinu úhlovou rychlostí ω v záporném směru (tj. po směru hodinových ručiček, v opačném směru než ve kterém roste φ). Zjistěte závislost rychlosti kuličky v na r. *Jedna řešitelná úloha mezi nápady Jardy Trnky.*

Nejvýhodnější bylo řešit úlohu pomocí zákona zachování energie. Energie se sice v laboratorní soustavě nezachovává (na udržení konstantní úhlové rychlosti rotace spirály musíme dodávat energii), ale v neinerciální soustavě, ve které je spirála v klidu, ano. Energie kuličky se skládá z kinetické energie a z potenciální energie odstředivé síly. Tu lehce spočítáme integrací $F_{\mathrm{od}} = -m\omega^2 r$ podle r. Pokud rychlost kuličky v neinerciální soustavě označíme V, pak má zákon zachování energie tvar

$$\frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 r_0^2.$$

Popišme pohyb kuličky v laboratorní soustavě okamžitou radiální rychlostí v_{r} a okamžitou úhlovou rychlostí Ω. Rotuje-li spirála rychlostí $-\omega$, dostaneme z vlastností úlohy pro radiální rychlost vztah $v_{\mathrm{r}} = C(\Omega + \omega)$. (Promysli, proč tento vztah musí platit i pro počáteční podmínky). V rotující soustavě má kulička úhlovou rychlost $\Omega + \omega$, radiální rychlost zůstává stejná, pro rychlost V tedy platí zřejmý vztah

$$V = \sqrt{v_{\mathrm{r}}^2 + r^2(\Omega + \omega)^2} = (\Omega + \omega)\sqrt{C^2 + r^2}.$$

Dosadíme za V do vztahu pro zákon zachování energie a upravíme

$$(\Omega + \omega)^2(C^2 + r^2) - \omega^2 r^2 = (C^2 + r_0^2)(\Omega_0 + \omega)^2 - \omega^2 r_0^2,$$

vyjádříme Ω v závislosti na r

$$\Omega^2(C^2 + r^2) + 2\Omega\omega(C^2 + r^2) - (C^2 + r_0^2)(\Omega_0^2 + 2\Omega_0\omega) = 0.$$

Řešením této kvadratické rovnice je

$$\Omega = -\omega \pm \frac{\sqrt{\omega^2(C^2 + r^2) + (C^2 + r_0^2)(\Omega_0^2 + 2\Omega_0\omega)}}{\sqrt{C^2 + r^2}}.$$

Zadání odpovídá kladné znaménko. Pro v_{r} získáme vztah

$$v_{\mathrm{r}} = C(\Omega + \omega) = C\frac{\sqrt{\omega^2(C^2 + r^2) + (C^2 + r_0^2)(\Omega_0^2 + 2\Omega_0\omega)}}{\sqrt{C^2 + r^2}}.$$

Pro rychlost kuličky v laboratorní soustavě platí $v = \sqrt{v_{\mathrm{r}}^2 + \Omega^2 r^2}$. Po dosazení vychází

$$v^2 = \omega^2(2r^2 + C^2) + (C^2 + r_0^2)(\Omega_0^2 + 2\omega\Omega_0) - 2\omega r^2\frac{\sqrt{\omega^2(C^2 + r^2) + (C^2 + r_0^2)(\Omega_0^2 + 2\Omega_0\omega)}}{\sqrt{C^2 + r^2}}.$$

To je hledaná závislost $v(r)$. Pokud dosadíme $r = r_0$ a $\Omega = \Omega_0$, skutečně nám vyjde $v = \sqrt{C^2(\Omega_0 + \omega)^2 + r_0^2\Omega_0^2} = \sqrt{v_{\mathrm{r}0}^2 + v_{\varphi 0}^2}$.

Pár slov k došlým řešením. Jediný *Matouš Ringel* vyřešil úlohu správně a právem si zaslouží výjimečné bodové ohodnocení. Zajímavé řešení poslal *Anton Repko*, ostatní řešitelé tahali za kratší konec. Největší chybou bylo ztotožnění úhlové rychlosti rotace spirály ω s úhlovou rychlostí kuličky Ω.

Jarda Trnka
jarda@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.