

**17. ročník, úloha II.1 ... souboj lodí na Bajkalu** (4 body; průměr 2,07; řešilo 27 studentů)

Nákladní loď Chruščov vezoucí velký náklad uhlí se pohybuje rychlostí  $18 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ . Zdatní sovětské topiči začnou přehazovat uhlí rychlostí  $31 \text{ t}\cdot\text{min}^{-1}$  na kolemjedoucí rychlejší loď Sojuz, která pluje rychlostí  $54 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$  a má výkon  $400 \text{ kW}$ . Obě lodě se pohybují rovnoběžně a jsou dostatečně dlouhé. Na jaké hodnotě se ustálí rychlost Sojuzu? Aby bylo možné náklad dobře překládat, musí se rychlosti obou lodí vyrovnat. Jak toho dosáhneme? Uhlí je přehazováno kolmo na pohyb lodí a má zanedbatelnou rychlost vůči Chruščovu. Odporová síla je u obou lodí stejná a nezávisí na jejich hmotnosti ani rychlosti.

*Nad úlohou debatovali Kája Tůma a Honza Prachař.*

Nejdříve si uvědomíme, proč Sojuz (rychlejší loď) zpomaluje. Není to tím, že roste jeho hmotnost, protože (jak jsme předpokládali) odporová síla nezávisí na hmotnosti lodě. Podívejme se na situaci z paluby Sojuzu, zde přistává uhlí, které sem házou topiči z Chruščova. Protože se Chruščov pohybuje pomaleji než Sojuz, má dopadající uhlí nenulovou rychlost opačného směru než je směr plavby. Uhlí je následně urychleno na nulovou rychlost vzhledem k palubě Sojuzu, je mu tedy dodána hybnost  $\Delta p$ . Z toho důvodu je loď zpomalována. Rychlost Chruščova se vůbec nemění.

Rychlost Sojuzu a Chruščova označme  $v_s$  a  $v_c$ , výkon Chruščova je  $P$  a zdatní topiči přehazují uhlí rychlostí  $\mu = \Delta m / \Delta t$ . Zjistíme, na jakou rychlost  $v$  se Sojuz zpomalí.

Začneme tím, že si napíšeme pohybovou rovnici Sojuzu

$$ma = F.$$

Zajímá nás, na jaké rychlosti se Sojuz ustálí, potom je  $a = 0$ . Nyní určíme sílu  $F$ . Sojuz urychluje tažná síla  $F_1$  motoru. Výkon  $P$  je konstantní, platí tedy  $P = F_1 v$ , odtud

$$F_1 = \frac{P}{v}.$$

Dále na Sojuz působí odporová síla  $F_o$ . Tu určíme z počátečních podmínek, kdy na loď působily jen tažná a odporová síla, které byly v rovnováze

$$F_o = \frac{P}{v_s}.$$

Zbývá určit sílu  $F_2$ , kterou vyvolává uhlí dopadající na palubu. Rozdíl rychlostí obou lodí je  $v - v_c$ , uhlí tedy získává hybnost  $\Delta p = (v - v_c)\Delta m$ . Uhlí brzdí loď silou

$$F_2 = \frac{\Delta p}{\Delta t} = (v - v_c) \frac{\Delta m}{\Delta t} = (v - v_c)\mu.$$

Dosaďme nyní do pohybové rovnice

$$0 = F_1 - F_2 - F_o = \frac{P}{v} - (v - v_c)\mu - \frac{P}{v_s},$$

neboli

$$\mu v^2 + \left( \frac{P}{v_s} - \mu v_c \right) v - P = 0.$$

Hledaná rychlost  $v$  je větším kořenem této kvadratické rovnice (menší je záporný, neboť součin obou kořenů je  $-P$ )

$$v = \frac{v_c}{2} - \frac{P}{2\mu v_s} + \sqrt{\left(\frac{v_c}{2} - \frac{P}{2\mu v_s}\right)^2 + \frac{P}{\mu}} = 13 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 48 \text{ km/h.} \quad (1)$$

Můžeme také použít zákon zachování energie. Musíme si však dávat pozor, abychom na nic nezapomněli. Situaci budeme opět sledovat z paluby Sojuzu. Napišme si tedy energetickou bilanci (Sojuz má ustálenou rychlost  $v$ ) v časovém intervalu  $\Delta t$ ,

$$P\Delta t + \Delta E = F_o v \Delta t + \Delta E_v.$$

Na levé straně je práce, kterou vykonal motor, a energie odevzdaná uhlím dopadajícím na palubu. Na pravé straně je práce vykonaná odporovou silou a energie, kterou získala voda v řece (lodní šroub ji rozpohybovává). Postupně určíme všechny členy. Odporovou sílu již známe. Uhlí na palubě zastaví, proto odevzdá energii

$$\Delta E = \frac{1}{2} \Delta m (v - v_c)^2.$$

Energii  $\Delta E_v$  určíme ze zákona zachování hybnosti. Hybnost celé vody je  $p_v$  (má opačný směr než pohyb lodí) a po dopadu uhlí na palubu se zvětší o  $\Delta p_v$ . Hybnost Sojuzu je nulová, protože se nacházíme v soustavě spojené s ním. Hybnost soustavy loď-voda-uhlí se před a po dopadu uhlí na palubu musí rovnat, neboť je tato soustava izolovaná.

$$-p_v - \Delta m (v - v_c) = -p_v - \Delta p_v.$$

Odtud

$$\Delta p_v = \Delta m (v - v_c).$$

Pokud předpokládáme, že je voda v klidu, a vůči Sojuzu se tedy pohybuje rychlostí  $-v$ ,  $p_v = \Delta m v$ , vychází

$$\Delta E_v = \frac{(-p_v - \Delta p_v)^2}{2\Delta m} - \frac{p_v^2}{2\Delta m} = \frac{p_v \Delta p_v}{\Delta m} + \frac{(\Delta p_v)^2}{2\Delta m} = \Delta m v (v - v_c) + \frac{1}{2} \Delta m (v - v_c)^2.$$

Již známe všechny členy ze zákona zachování energie, můžeme do něj tedy dosadit (přitom dělíme  $\Delta t$ )

$$P + \frac{1}{2} \mu (v - v_c)^2 = \frac{P}{v_s} v + \mu v (v - v_c) + \frac{1}{2} \mu (v - v_c)^2.$$

Po úpravě dostáváme stejnou rovnici pro  $v$  jako předtím.

$$\mu v^2 + \left(\frac{P}{v_s} - \mu v_c\right) v - P = 0.$$

Nakonec vyřešíme, jak rychlosti lodí vyrovnat. Ze vztahu (1) vidíme, že pro  $\mu \rightarrow \infty$  je  $v \rightarrow v_c$ . Přehazováním uhlí ale vyrovnání rychlostí nedosáhneme. Pokud by se totiž rychlosti lodí vyrovnaly, bude síla  $F_2$  nulová a rychlost Sojuzu se začne opět zvětšovat.

Vyrovnat rychlosti však můžeme tak, že snížíme výkon kotlů Sojuzu na  $P' = P \cdot v_c / v_s = 133 \text{ kW}$ . Jinou variantou je, že k sobě lodě svážeme. Nebo můžeme přehazovat uhlí ne kolmo na pohyb, ale šikmo proti směru pohybu Sojuzu.

Poznámky k došlým řešením. Řešitelé, kteří se vydali první zmíněným postupem, byli většinou úspěšní a jejich řešení byla správná. Většina však vycházela ze zákona zachování energie, který nikdo nenapsal správně, a tudíž ani nikdo z nich neměl správný výsledek.

*Honza Prachař*

`honzik@fykos.mff.cuni.cz`