17. ročník, úloha I.2 ... zlatá rybka *(4 body; průměr 2,53; řešilo 76 studentů)*

Představte si dva rybáře sedící naproti sobě na březích řeky široké 30 m. Zlatá rybka plavající ve vodě spolkne v jednu chvíli návnady obou z nich. Vzdálenost od rybky k prvnímu rybáři je 17 m, ke druhému 20 m. V tu chvíli začnou oba rybáři navíjet, pořád rychleji a rychleji, avšak oba zrychlují stejně. A my se ptáme, po jaké křivce (před jejím analytickým vyjádřením preferujeme její název) se rybka dostane na přímku mezi oběma navijáky.

Z přípravy na slovenskou olympiádu zná Miro.

Víme, že zrychlení, se kterým oba rybáři navíjejí, je v každém okamžiku stejné. V každém časovém intervalu Δt tedy oba rybáři navinou stejný úsek vlasce. Rozdíl délek vlasců proto zůstává konstantní (3 metry). Křivkou, která má konstantní rozdíl vzdáleností od daných dvou pevných bodů – ohnisek (v našem případě rybářů), je hyperbola. Trajektorií rybky bude jen její část. K analytickému vyjádření hledané křivky zvolme počátek souřadnic do středu úsečky spojující oba rybáře a směr osy x k prvnímu rybáři. Označme délku vlasce prvního rybáře s_1, délku vlasce druhého rybáře s_2. Pak lze z Pythagorovy věty psát

$$s_2^2 = (x+l)^2 + y^2, \tag{1}$$

$$s_1^2 = (l-x)^2 + y^2. \tag{2}$$

$$s_2 - s_1 = \Delta s. \tag{3}$$

Odečtením rovnic (1) a (2) získáme

$$(s_2 - s_1)(s_2 + s_1) = 4xl.$$

Dosazením z (3)

$$\Delta s(2s_1 + \Delta s) = 4xl,$$

$$s_1 = \frac{2xl}{\Delta s} - \frac{\Delta s}{2}.$$

A konečně dosazením do (2) a úpravou

$$\frac{4l^2x^2}{(\Delta s)^2} - 2xl + \frac{(\Delta s)^2}{4} = (l-x)^2 + y^2.$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\Delta s}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{4l^2 - \Delta s^2}}{2}\right)^2} = 1.$$

Poloosy hledané hyperboly jsou $a = \Delta s/2 = 1{,}5\,\mathrm{m}$, $b = \sqrt{4l^2 - \Delta s^2}/2 = 14{,}9\,\mathrm{m}$, její střed bude středem úsečky spojující oba rybáře.

Jirka Lipovský
jirka@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.