

16. ročník, úloha VI. 3 ... tekoucí sklo (4 body; průměr 3,14; řešilo 7 studentů)

Na starých zámcích bývají originální tabulky skla v oknech u spodního okraje širší než u horního díky tečení. Za sto let se tabulka o rozměru $0,5 \text{ m} \times 0,5 \text{ m}$ a tloušťce 5 mm rozšíří o $0,1 \text{ mm}$. Odhadněte z těchto údajů viskozitu skla a určete, kolikrát těžší by musela být Země, aby toto tečení probíhalo turbulentně.

Předně vyvraťme onen celosvětově rozšířený mýtus. I v Encyklopedia Britannica se můžete dočíst o tom, že skleněné tabulky v chrámech z 12. století jsou naspoďu širší díky tomu, že sklo je vlastně kapalina a za onen velmi dlouhý čas steklo dolů. E. D. Zanotto v článku *Do cathedral glasses flow?* publikovaném v roce 1998 v American Journal of Physics ukázal, že kdyby tečení skla za pokojové teploty mělo být příčinou rozšíření tabulek, trvalo by mu to dobu srovnatelnou se stářím Země, nikoliv několik stovek let. Skutečnou příčinou rozšíření tabulek je údajně proces jejich výroby.

Řekněme si na rovinu, přecenili jsme vás i sebe, pokud jsme si mysleli, že lze nějak jednoduše a správně odhadnout rozšíření „padající“ kapaliny s volnými povrchy. Vydejme se cestou analogií a rozměrové analýzy. Tečné napětí (síla na plochu) v pohybujícím se skle jde vyjádřit jako

$$\tau = \eta \frac{dv}{dx},$$

kde v je rychlost toku a x vzdálenost dvou blízkých plošek, které na sebe působí onou silou. Bude-li tok v nějakém smyslu slova ustálený, bude tato vnitřní třecí síla v rovnováze se silou F , která tok způsobuje. F by mohla být úměrná (minimálně řádově) rozdílu mezi tlakem v místě, odkud sklo teče, a tlakem v místě, kam sklo teče $F \approx h\varrho g$. Konstanta úměrnosti bude mít rozměr povrchu. Tedy řádově můžeme položit do rovnosti

$$\eta \frac{v}{h} = h\varrho g.$$

Rychlost je také přibližně $v = d/T$, kde T je sto let a d rozšíření. Tedy pro viskozitu

$$\eta = \frac{h^2 \varrho g T}{d} \approx 10^{15}.$$

Jelikož náš postup je dost pochybný, odhadujeme chybu v řádu na ± 5 . Na internetu se dá najít, že viskozita běžného skla za pokojové teploty je $10^{18} \div 10^{21} \text{ Pa}\cdot\text{s}$. Takže vlastně ani nemůžeme říct, zda tečení skla za stovky let je nebo není možné.

Jednomu z organizátorů se po značném úsilí nakonec podařilo za jistých podmínek kvantitativně vyřešit tečení skla lépe než jen rozměrovou analýzou. Bohužel kvůli matematické náročnosti není zmíněné řešení publikovatelné v této ročence.

A jak těžká by měla být Země, aby proudění bylo turbulentní? Dosadíme do vztahu pro Reynoldsovo číslo

$$\mathcal{R}e = \frac{\varrho v d}{\eta}$$

pro proudění Newtonovské kapaliny. Aby byla hodnota tohoto čísla nadkritická, musela by kapalina proudit rychleji, než letí světlo ve vakuu, což je nesmysl. Důvodem může ale být to, že při tak velkých viskozitách vztah pro Reynoldsovo číslo vůbec nemusí platit nebo jeho kritické hodnoty budou úplně jiné, než je obvyklé pro běžné kapaliny. Ale i tak pokud by tíha

měla být taková, aby sklo pod jejím vlivem za pokojové teploty skutečně teklo, hmotnost Země by musela být tak velká, že by se zhroutila do černé díry atd.

Honza Houšťek

honza@fykos.mff.cuni.cz