16. ročník, úloha V . S ... algebra *(5 bodů; průměr 4,31; řešilo 13 studentů)*

a) *Dokažte, že vektory $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (-1, 0, 1), v_3 = (1, 1, 1)$ jsou lineárně závislé.*

b) *Vyřešte následující soustavu diferenciálních rovnic pomocí výpočtu exponenciály matice*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Diskutujte tvar trajektorie řešení v rovině x, y v závislosti na znaménku parametrů a, b.

c) *Napište matice R_1, R_2, R_3 popisující prostorové rotace o úhel $\pi/2$ okolo os x, y a z a spočítejte komutátory $[R_1, R_2]$, $[R_1, R_3]$ a $[R_2, R_3]$. Jako bonus se můžete pokusit své výsledky zapsat v jednotném tvaru pomocí takzvaného Levi-Civittova ε.*

a) Lineární závislost vektorů v_1, v_2, v_3, ověříme tak, že nalezneme tři čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, z nichž je alespoň jedno nenulové, a platí $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ (symbol „0" na pravé straně této rovnosti představuje nulový vektor a nikoliv číslo 0!). Nulový vektor má nulové všechny složky. Odtud dostáváme pro koeficienty α podmínky

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad 2\alpha_1 + \alpha_3 = 0, \quad 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

Tuto soustavu rovnic můžeme vyřešit metodou Gaussovy eliminace. Dostáváme

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Vidíme, že poslední řádek této matice se vynuloval, což znamená, že α_3 musí splňovat podmínku $0 \cdot \alpha_3 = 0$ a můžeme ho tedy volit libovolně (např. 2). Lineární závislost je tímto dokázána. Pro úplnost můžeme ještě dopočítat zbylé koeficienty α_1, α_2. Pohledem na poslední matici v (1) snadno zjistíme, že $\alpha_2 = 1, \alpha_1 = -1$ (zvolili jsme $\alpha_3 = 2$). Jinou metodou, jak dokázat lineární závislost zadaných vektorů, je koeficienty α uhádnout.

b) Pomocí matice

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \tag{2}$$

můžeme reprezentovat komplexní číslo $a + b\mathrm{i}$. Skutečně, nechť $x = a + b\mathrm{i}$ a $y = c + d\mathrm{i}$ jsou dvě komplexní čísla. Součet a součin těchto čísel je $x + y = (a + b) + (c + d)\mathrm{i}$ a $xy = (ab - cd) + (ad + bc)\mathrm{i}$. Pokud těmto číslům přiřadíme matice podle (2) (označme je X, Y), bude součet a součin těchto matic (ověřte)

$$X + Y = \begin{pmatrix} a + c & -b - d \\ b + d & a + c \end{pmatrix}, \quad XY = YX = \begin{pmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix}.$$

Diagonální a nediagonální prvky výsledných matic tedy odpovídají reálné a imaginární části součtu (součinu) čísel x, y, tak jako v (2). Dále uvažujme takto. Exponenciála matice je definována pomocí Taylorovy řady $\mathrm{e}^X = \sum_{n=0}^{\infty} X^n/n!$. V této definici vystupují pouze operace sčítaní a násobení, které (jak jsme ověřili výše) jsou zachovány při zobrazení mezi komplexními čísly a maticemi typu (2) (obraz součtu je součet obrazů a obraz součinu je součin obrazů). Exponenciálu matice M typu (2) tedy můžeme spočítat tak, že jí přiřadíme komplexní číslo m, spočítáme jeho exponenciálu (s využitím vzorce $\mathrm{e}^{(a+b\mathrm{i})} = \mathrm{e}^a(\cos b + \mathrm{i} \sin b)$

z prvního dílu seriálu) a výsledku přiřadíme zpět matici, kterou prohlásíme za exponenciálu M.

Stačí si již jen vzpomenout na čtvrtý díl seriálu, ve kterém bylo uvedeno, že řešení soustavy diferenciálních rovnic $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{v}$, kde $\boldsymbol{v}$ je vektor, jehož složky jsou neznámé funkce, a A je matice soustavy, lze zapsat jako $\boldsymbol{v}(t) = \mathrm{e}^{At}\boldsymbol{v}_0$, kde $\boldsymbol{v}_0$ je vektor počáteční podmínky (všimněte si, že tato formule vypadá formálně úplně stejně jako v jednodimenzionálním případě).

Řešením zadané soustavy je tedy

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \mathrm{e}^{at}\begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

V tomto výsledku poznáváme nám známou matici pro rotaci o úhel bt okolo počátku (vynásobenou faktorem e^{at}). Vektor (x, y) se tedy s časem vyvíjí tak, že se otáčí okolo počátku s úhlovou rychlostí $\omega = b$ a zároveň se mění jeho délka úměrně faktoru e^{at}. Trajektorie řešení tedy tvoří spirály. Smysl rotace je dán znaménkem parametru b a znaménko parametru a rozhoduje o tom, zda se spirála zavíjí nebo rozvíjí. Ve speciálním případě $a = 0$ pak trajektorie tvoří kružnice.

Pokuste se na základě těchto výsledků rozhodnout, za jakých podmínek bude poloha (0,0) stabilní, tj. kdy se řešení s počáteční podmínkou danou vektorem (0,0) vrátí zpět do blízkosti tohoto bodu v případě, že ho malinko postrčíme mimo počátek souřadné soustavy.

c) Matici R_3 popisující rotaci o úhel $\pi/2$ okolo osy z snadno nalezneme, známe-li matici popisující rotaci o obecný úhel φ okolo této osy (ta byla uvedena v pátém díle) pouhým dosazením $\varphi = \pi/2$, dostáváme

$$R_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Zbylé dvě matice R_1, R_2 získáme buď tak, že si uvědomíme, jak si vymění role osy x, y, z při ostatních rotacích, a přehodíme příslušné řádky a sloupce v (3). Jinou možností je si přímo rozmyslet, jak se při těchto rotacích mění bázové vektory $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Například při rotaci okolo osy x se $\boldsymbol{e}_1$ nezmění, $\boldsymbol{e}_2$ přejde na $\boldsymbol{e}_3$ a $\boldsymbol{e}_3$ přejde na $-\boldsymbol{e}_2$ (pro R_2 můžeme postupovat analogicky). Dostáváme

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Komutátory těchto matic jsou

$$[R_1, R_2] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [R_2, R_3] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [R_3, R_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pavel Augustinský
`fykos@mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.