

16. ročník, úloha V. P ... pramínek vody (4 body; průměr 2,30; řešilo 10 studentů)

Jaký je geometrický tvar (průřez) kapaliny vytékající z kohoutku v závislosti na vzdálenosti od hrdla? Pokuste se také odhadnout, v jaké vzdálenosti se proud vody začne trhat.

Předpokládejme, že tvar potrubí a tlak v něm jsou takové, že voda z kohoutku o kruhovém průřezu vytéká laminárně počáteční rychlostí v_0 . Jen v takovém případě bude mít vytékající pramínek kruhový, zužující se, průřez. Předpokládejme, že rychlost v dané výšce je v celém průřezu konstantní. Pak bude platit rovnice kontinuity v nejjednodušším tvaru, tj. průřez krát rychlost v dané výšce bude konstanta.

Dále předpokládejme, že voda je dokonalá tekutina a její proudění je nevířivé, což obojí bude platit dostatečně přesně. Pak můžeme napsat Bernoulliho rovnici, tj. pro vzdálenost h od kohoutku, ρ hustotu vody, v rychlost proudění, p tlak v daném místě a g tíhové zrychlení

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + h\rho g + p = \frac{1}{2}\rho v_0^2 + p_0.$$

Posledním předpokladem nutným pro vyřešení bude položení $p = p_0$, neboli že tlak uvnitř pramínku je všude stejný.

Nyní je výpočet průměru proudu ve vzdálenosti h od kohoutku otázkou pouhého dosazení a vyjádření.

$$v = \frac{S_0 v_0}{S} = \sqrt{v_0^2 - 2hg},$$

$$d = d_0 \sqrt{\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 - 2hg}}}.$$

Ač na první pohled jsme provedli mnoho přiblížení, ve skutečnosti jsou všechna dobře splněna a tento výsledek souhlasí se skutečností. Naproti tomu druhá část úlohy, tj. odhad vzdálenosti, ve které se pramínek začne trhat, je značně komplikovaný. Vysvětlíme tedy pouze kvalitativně, proč se pramínek vůbec trhat začne.

Užší pramínek má větší povrchové zakřivení, a tudíž je v něm větší kapilární tlak. Tedy má kapalina tendenci z místa o užším průměru vytékat. Při zužování pramínku v důsledku pádu se to samozřejmě neprojeví, kapalina nepoteče nahoru. Nesmíme ovšem zapomenout na vsudypřítomné povrchové fluktuace, které budou pro dostatečně úzký pramínek natolik významné, že zúžení v jejich důsledku se díky kapilárnímu tlaku zvětší, až se pramínek zcela roztrhne. Popsat tento jev kvantitativně dá ovšem mnoho práce, pokud byste se o něm chtěli něco dozvědět, hledejte v literatuře pojem Rayleighova-Taylorova nestabilita. Závěrem pochvala pro Matouše Ringela, který se jako jediný nezalekl a vymyslel, byť velmi zjednodušený, model dávající rozumné výsledky.

Lenka Zdeborová
fykos@mff.cuni.cz