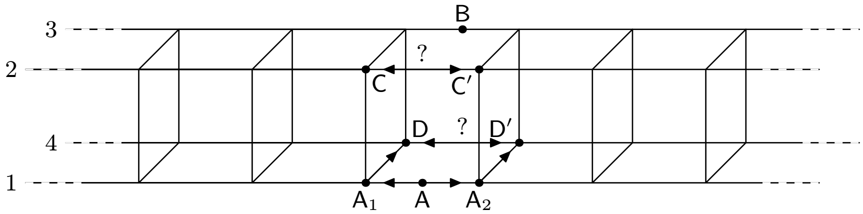
16. ročník, úloha V . 4 ... síť *(4 body; průměr 3,09; řešilo 11 studentů)*

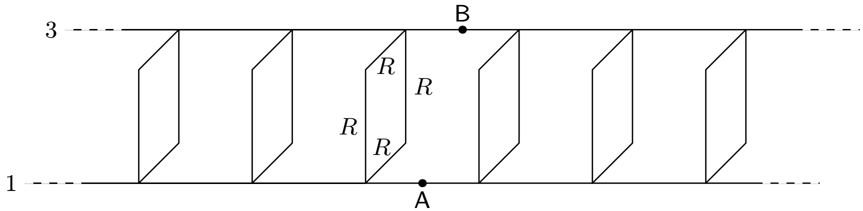
Spočtěte odpor mezi body A, B *na nekonečné síti na obrázku 1. Všechny hrany sítě mají stejnou délku a odpor.*

Nechť BÚNO[1] proud vtéká do uzlu A a vytéká z uzlu B. V uzlu A se rozděluje a pokračuje do uzlů A_1 a A_2. Odtud teče část do uzlů D a D′. Mezi body D, D′ neteče žádný proud. Rovina kolmá na přímky 1 až 4 a procházející uzly A, B rozděluje síť na dvě symetrické části. Pokud by proud tekl z uzlu D do uzlu D′, musel by téct stejně velký proud také opačným směrem. Ze stejných důvodů nebude téct žádný proud ani mezi uzly C, C′, ani mezi libovolnými sousedními uzly ležícími na drátech 2 a 4.



Obr. 1

Překreslíme si schéma vynecháním odporů, kterými neteče proud.

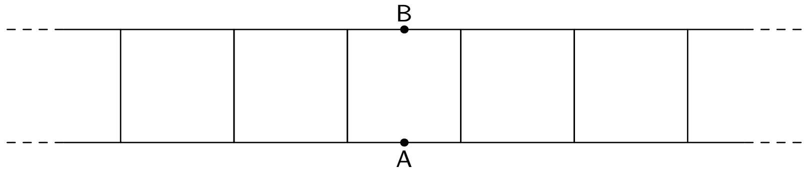


Obr. 2

Podle obrázku 2 vidíme, že příčky mezi dráty 1 a 3 tvoří dva a dva rezistory zapojené vůči sobě paralelně. Pro celkový odpor jedné této příčky platí

$$R_{\mathrm{p}} = \frac{2R \cdot 2R}{2R + 2R} = R.$$

Překreslíme si síť na jednodušší schéma.



Obr. 3

Toto je nekonečná síť, která se dá rozdělit na dvě části (vpravo a vlevo od uzlů A, B), zapojené vůči sobě paralelně. Vezměme pravou polovinu této sítě. Její odpor nechť je R_{P}. Po vložení další jednotky se odpor nezmění (viz obr. 4).

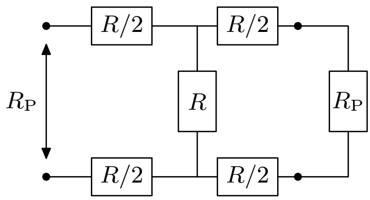
[1] bez újmy na obecnosti

Pro odpor R_P tedy platí

$$R_\mathrm{P} = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} + r,$$

kde

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{R}{2} + \frac{R}{2} + R_\mathrm{P}}.$$



Obr. 4

Po vyjádření

$$R_\mathrm{P} = R + \frac{R(R + R_\mathrm{P})}{2R + R_\mathrm{P}},$$

$$R_\mathrm{P} = R\sqrt{3}.$$

Složením pravé a levé strany sítě ($R_\mathrm{P} = R_\mathrm{L}$) dostaneme

$$R_\mathrm{celk} = \frac{R_\mathrm{P} R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{P} + R_\mathrm{L}} = \frac{R_\mathrm{P}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} R.$$

Pavol Habuda
`bzuco@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.