16. ročník, úloha IV . S . . . *diferenciální rovnice* *(5 bodů; průměr 3,90; řešilo 10 studentů)*

a) Organizátor FYKOSu vypil velmi rychle láhev tvrdého alkoholu. Alkohol se z žaludku vstřebává do krve rychlostí úměrnou jeho množství (v žaludku) s konstantou úměrnosti α a z krve je odbouráván játry podle stejného vztahu, tentokrát však s konstantou úměrnosti β. Sestavte diferenciální rovnici popisující tyto děje, určete závislost množství alkoholu v krvi na čase, určete čas, ve kterém je koncentrace maximální, a vypočítejte ji.

b) Šnek plazící se rychlostí $1\,\mathrm{mm\cdot s^{-1}}$ se v čase t_0 postaví na začátek gumového lana dlouhého 1 m a začne se plazit. Ve stejném okamžiku se lano začne napínat rychlostí $1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ (je nekonečně pružné, takže nikdy nepraskne). Rozhodněte, zda šnek dosáhne konce lana v konečném čase a pokud ano, spočítejte, za jak dlouho se tak stane.

c) Takzvaná redukovaná Gaussova rovnice má tvar

$$xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0.$$

Předpokládejte řešení ve tvaru Taylorova polynomu, určete vztah pro jeho koeficienty a vyšetřete asymptotické chování řešení (tj. určete jakou funkcí by se dalo vystihnout jeho chování pro velká x). Určete pro jaké hodnoty koeficientů γ a α je konečný tento integrál

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}} F(\alpha,\gamma,x)\,dx,$$

kde $F(\alpha,\gamma,x)$ značí řešení Gaussovy rovnice (takzvaná redukovaná hypergeometrická funkce). Poznámka: Pokud označíme $E = -1/\alpha^2$, dostaneme z poslední rovnice pro E zajímavou podmínku. A pokud se vám při pohledu na ni začíná vybavovat vzorec pro možné hodnoty energie elektronu v atomu vodíku, pak vězte, že podobnost s vaším výsledkem není vůbec náhodná.

a) Množství alkoholu v žaludku (označme A) podle zadání klesá rychlostí úměrnou A, takže se vyvíjí podle diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -\alpha A.$$

Tuto rovnici vyřešíme metodou separace proměnných

$$\int \frac{\mathrm{d}A}{A} = \int -\alpha\,\mathrm{d}t,$$
$$\ln A = -\alpha t + C.$$

V čase $t = 0$ je množství alkoholu v žaludku rovno jeho počátečnímu (vypitému) množství A_0, takže integrační konstanta má hodnotu $\ln A_0$. Množství alkoholu v žaludku tedy klesá podle vztahu

$$A = A_0 \mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

Koncentrace alkoholu v krvi (označme B) je zvyšována jeho vstřebáváním z trávicího ústrojí, ale zároveň je snižována odbouráváním játry. Vyvíjí se tedy podle rovnice

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} - \beta B.$$

Dosazením za $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t$ dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} + \beta B = \alpha A_0 \mathrm{e}^{-\alpha t}. \tag{1}$$

Tuto nehomogenní diferenciální rovnici vyřešíme metodou variace konstant. Nejprve vyřešíme příslušnou homogenní rovnici. Na ni můžeme použít například metodu charakteristického polynomu. Budeme předpokládat, že řešení má tvar $B = C\mathrm{e}^{\lambda t}$. Tím dostaneme

$$\lambda B + \beta B = 0,$$

tedy $\lambda = -\beta$. Řešení homogenní rovnice nyní dosadíme do původní rovnice (1) a budeme předpokládat, že konstanta C, která v něm vystupuje není konstantní, ale je závislá na čase. Dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-\beta t} - \beta C\mathrm{e}^{-\beta t} + \beta C\mathrm{e}^{-\beta t} = \alpha A_0 \mathrm{e}^{-\alpha t},$$
$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = \alpha A_0 \mathrm{e}^{(\beta-\alpha)t}.$$

Poslední rovnici vyřešíme integrací podle času

$$C(t) = \frac{\alpha A_0}{\beta - \alpha}\mathrm{e}^{(\beta-\alpha)t} + K,$$

kde K je integrační konstanta. Řešení (1) má tedy tvar

$$B = \frac{\alpha A_0}{\beta - \alpha}\mathrm{e}^{-\alpha t} + K\mathrm{e}^{-\beta t}.$$

Jedná se dokonce o obecné řešení, protože v něm vystupuje obecný násobek řešení homogenní rovnice. Hodnotu K určíme z požadavku, aby v čase $t = 0$ bylo $B = 0$ (na začátku je organizátor střízlivý). Závislost B na čase je tedy

$$B = \frac{\alpha A_0}{\beta - \alpha}\left(\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t}\right). \tag{2}$$

Z (1) vidíme, že B je maximální, když $\alpha A = \beta B$. Tato rovnost je splněna v čase

$$t = \frac{1}{\alpha - \beta}\ln\frac{\alpha}{\beta}.$$

Dosazením do (2) dostáváme pro maximální koncentraci

$$B_{\max} = \frac{\alpha A_0}{\beta - \alpha}\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}} - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}\right).$$

b) Polohu šneka popíšeme parametrem x udávajícím jeho relativní polohu vůči konci vlákna (na začátku je $x = 0$ a na konci $x = 1$). Za krátký časový okamžik $\mathrm{d}t$ se šnek posune vůči místu, na kterém zrovna stojí, o malou vzdálenost $\mathrm{d}s = v_s\,\mathrm{d}t$, kde v_s je rychlost šneka (protažení úseku ds je zanedbatelné). V čase t je délka lana $l = l_0 + v_l t$, kde v_l je rychlost konce lana. Změna relativní polohy šneka za čas dt je tedy

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}s}{l} = \frac{v_s\,\mathrm{d}t}{l_0 + v_l t}.$$

Tím dostáváme rozseparovanou diferenciální rovnici, kterou vyřešíme integrací obou stran

$$\int \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}s}{l} = \int \frac{v_s\,\mathrm{d}t}{l_0 + v_l t},$$

$$x = \frac{v_s}{v_l} \ln\left(\frac{l_0}{v_l} + t\right) + C.$$

V čase $t = 0$ je $x = 0$, takže integrační konstanta C má hodnotu

$$C = -\frac{v_s}{v_l} \ln \frac{l_0}{v_l}.$$

Relativní poloha šneka tedy na čase závisí jako

$$x = \frac{v_s}{v_l} \ln\left(1 + \frac{v_l t}{l_0}\right).$$

Na konec lana se šnek dostane v momentě, kdy $x = 1$, což nastane za čas

$$t = \frac{l_0}{v_l}\left(\mathrm{e}^{v_l/v_s} - 1\right) = (\mathrm{e}^{1000} - 1)\,\mathrm{s} \approx 10^{434}\,\mathrm{s}.$$

c) Řešení rovnice $zy'' + (\gamma - z)y' - \alpha y = 0$ budeme předpokládat ve tvaru $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Z podmínky nulovosti koeficientů u všech mocnin z dostaneme vztah pro koeficienty a_n

$$n(n+1)a_{n+1} + \gamma(n+1)a_{n+1} - (n+\alpha)a_n = 0,$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+\alpha)a_k}{(n+1)(n+\gamma)}. \tag{3}$$

Pro velká n budou α i γ oproti n zanedbatelné, takže (3) přejde na

$$a_{n+1} \approx \frac{a_n}{n}$$

a koeficienty a_n tedy klesají zhruba jako $a_n \approx c/n!$, kde c je nějaká konstanta. Stejný Taylorův rozvoj má funkce e^z a řešení redukované hypergeometrické rovnice se tedy asymptoticky chová jako exponenciála (pokud $c \neq 0$). Zadaný integrál tedy v obecném případě není konečný, protože i po vynásobení klesající exponenciálou $\mathrm{e}^{-z/2}$ se řešení stále asymptoticky chová jako $\mathrm{e}^{z/2}$. Při pohledu na (3) však zjistíme, že pokud bude α nekladné celé číslo, budou od určitého n ($n = -\alpha$) všechny koeficienty a_n nulové. V tomto případě se tedy řešení Gaussovy rovnice zredukuje na pouhý polynom. A vzhledem k tomu, že $\int_0^\infty x^k \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ je konečný pro všechna k a že součet konečně mnoha konečných čísel je konečný, bude konečný i zadaný integrál. Podmínka konečnosti tedy zní $\alpha = 0, -1, -2, -3, \ldots$

Poznámka nakonec. Pokud ani argumenty uvedené ve čtvrtém díle seriálu náhodou nepodlomily vaši případnou důvěru v to, že každá funkce má Taylorův rozvoj, zamyslete se nad tím, proč jsme naznačeným postupem získali pouze jedno řešení, ačkoliv jsme řešili diferenciální rovnici druhého řádu.

Pavel Augustinský
`fykos@mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.