16. ročník, úloha III . S ... *integrály* *(4 body; průměr 3,40; řešilo 30 studentů)*

a) *Spočítejte integrály funkcí* $y = x^2\,\mathrm{e}^x$, $y = \sin^3 x \cos^2 x$.

b) *Určete obsah obrazce, který je ohraničen funkcemi* $y_1 = \sqrt{|x|} + \sqrt{1-|x|}$, $y_2 = \sqrt{|x|} - \sqrt{1-|x|}$. *Tento obrazec nakreslete.*

a) Budeme integrovat dvakrát *per-partes*, abychom se zbavili funkce x^2 před e^x

$$F(x) = x^2, \quad f(x) = 2x,$$
$$g(x) = \mathrm{e}^x, \quad G(x) = \mathrm{e}^x,$$

$$I_1 = \int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)\,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x, \qquad (1)$$

zintegrujeme podruhé per-partes

$$I_1 = x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x = x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\int \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + C.$$

Relativně dost řešitelů nenapsalo konstantu na konec výrazu. Primitivní funkce k dané funkci není jen jedna, ale je jich hned několik – tedy lépe řečeno nekonečně mnoho. A dále spousta řešitelů psala konstanty tam, kde nemusí být. Takže pro pořádek – když provádíme substituci, k funkci g hledáme primitivní funkci, k integraci per-partes ale nepotřebujeme všechny primitivní funkce, ale stačí nám pouze jedna, proto zde konstantu nepíšeme. Ve výrazu (1) také nemusíme psát konstantu, protože ta je *schována* v druhém integrálu.

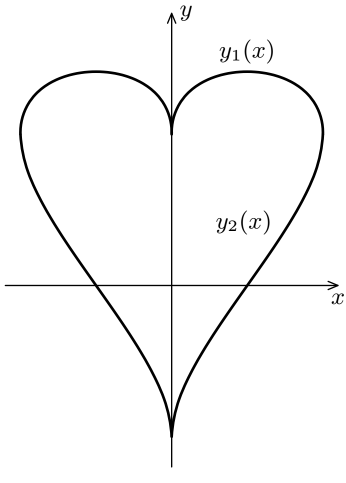
Druhá funkce je *lichá* v sinu, a proto je nejvýhodnější použít substituci $y = \cos x$. Potom $\mathrm{d}y = -\sin x\,\mathrm{d}x$. Ještě ověříme, že substituce je definovaná na definičním oboru integrálu a všude má vlastní derivaci, což u cosinu je splněno. Pak už můžeme psát

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \sin^3 x \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \\ &= -\int (1-\cos^2 x)\cos^2 x(-\sin x)\,\mathrm{d}x = \\ &= -\int (1-y^2)y^2\,\mathrm{d}y = \int y^4 dy - \int y^2\,\mathrm{d}y = \\ &= \frac{y^5}{5} - \frac{y^3}{3} + C, \end{aligned}$$

a ještě musíme zpátky dosadit substituci

$$I_2 = \frac{y^5}{5} - \frac{y^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

b) Nejprve zjistíme definiční obor funkcí, $D_y = \langle -1; 1\rangle$. Funkce jsou sudé, a tedy plochu nemusíme počítat jako dva integály, celková plocha bude dvojnásobek plochy mezi funkcemi na intervalu $\langle 0; 1\rangle$.



Obr. 1. Graf zadaných funkcí

Obsah plochy mezi dvěma funkcemi se spočítá jako určitý integrál $\int_a^b |y_1(x) - y_2(x)|$. Snadno pak ověříme, že y_1 je na celém svém definičním oboru větší než y_2, a proto můžeme počítat

$$S = 2\int_0^1 (y_1(x) - y_2(x))\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \Big(\sqrt{|x|} +$$
$$+ \sqrt{1-|x|} - \sqrt{|x|} + \sqrt{1-|x|}\Big)\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

Zavedeme substituci $z = 1 - x$, $\mathrm{d}z = -\,\mathrm{d}x$, musíme ale také změnit meze určitého integrálu

$$S = -4\int_1^0 z^{1/2}\,\mathrm{d}z = 4\int_0^1 z^{1/2}\,\mathrm{d}z = 4\left[\frac{2}{3}z^{3/2}\right]_0^1 = \frac{8}{3}.$$

Honza Pacák
`fykos@mff.cuni.cz`