

16. ročník, úloha II. P ... basic instinct (5 bodů; průměr 1,77; řešilo 13 studentů)

Sekáček na led – známý vražedný nástroj z tohoto filmu (vy, kdo jste tento výplod kinematografie ještě neshlédli, vězte, že toto náčiní vypadá zhruba jako šroubovák s ostrou špičkou) postavila chladnokrevná vražedkyně z dlouhé chvíle na hrot. Pomocí relací neurčitosti odhadněte maximální dobu, po kterou corpou delicti setrvá v této poloze.

Podle zadání je sekáček umístěn do labilní rovnovážné polohy. V takovém případě sebemenší výchylka z rovnovážné polohy způsobí to, že se sekáček začne pohybovat a dříve nebo později spadne. Jak dlouho to bude trvat v závislosti na velikosti počáteční výchylky, za chvíli vyřešíme.

V této úloze řešíme kvantově-mechanické aspekty setrvání tělesa v labilní poloze. Mnozí z vás uváděli chvění podložky, tepelný pohyb molekul sekáčku a jiné podobné důvody porušení rovnováhy. To je sice pravda, nicméně z Heisenbergova principu neurčitosti plyne, že sekáček nutně spadne i bez přispění těchto vlivů.

Místo polohy a hybnosti potřebujeme v kvantové mechanice znát tzv. vlnovou funkci interpretovanou většinou pomocí kvadrátu její normy, který udává hustotu pravděpodobnosti nalezení systému v daném stavu. Lidsky řečeno – nelze užít dvě veličiny (polohu a hybnost) k popisu stavu sekáčku. Pracujeme s vlnovou funkcí, pomocí které lze počítat statistická rozdělení výsledků opakovaných měření na daném systému. Ano – stejná měření dopadají pokaždé různě a náhodně. Navíc každé měření změní kvantový stav, takže před opakováním musíme znovu nastavit původní podmínky. Celou věc navíc komplikuje to, že neexistuje způsob, jak současně změřit polohu i hybnost. Takže změříme-li jednu z těchto veličin, nemáme už žádnou šanci změřit tu zbývající, protože měřením jsme stav změnil. Kvalitativně je tento fakt obsažen ve vztahu

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (1)$$

Míra exaktnosti vzorce (1) závisí na definici veličin Δx a Δp . V našem příkladě nám bude stačit pouze přibližná představa, že součin chyb (tj. nepřesností, neurčitostí, nejistot, ...) v určení polohy a hybnosti nemůže být menší, než nějaká konstanta.

Vraťme se nyní k problému s padajícím sekáčkem. Úplné kvantově mechanické řešení by znamenalo vyřešení Shrödingerovy rovnice a následné nalezení takové vlnové funkce, která se bude co nejpomaleji „rozplývat“. Takové řešení je sice proveditelné, ale bohužel ne středoškolskými prostředky.

Abychom spočítali alespoň něco, zvolme následující „poloklasický“ postup: Počáteční výchylku vrcholu sekáčku z rovnovážné polohy označme x_0 , počáteční rychlost v_0 . Dobu pádu maximalizujeme, pokud bude současně co nejmenší x_0 a v_0 . Musíme však splnit relace neurčitosti, a proto

$$x_0 m v_0 = \frac{\hbar}{2}. \quad (2)$$

Znovu připomeňme, že se jedná pouze o odhad. Zmíněná „poloklasičnost“ spočívá v tom, že navzdory relacím neurčitosti připouštíme, že současně známe rychlost i polohu sekáčku a počítáme úlohu klasicky. Pochopitelně stavy, mezi kterými budeme hledat kandidáta na nejpomalejší pád, splňují relace neurčitosti s rovností. Za počáteční hodnoty do klasického řešení dosazujeme přitom kvantové neurčitosti. Lze si to představit tak, že bude-li počáteční kvantový stav sekáčku hodně lokalizovaný v prostoru, bude naměřená hodnota x_0 hodně malá, ale zato hodnota p_0 měřená na stejném stavu bude díky velké neurčitosti naopak pravděpodobně velmi velká. Musíme tedy najít nejlepší „kompromis“.

Tím máme fyzikální úvahu za sebou a zbývající postup už je přímočarý – v závislosti na x_0 a v_0 klasicky spočítáme dobu pádu a pak se při splnění vztahu (2) budeme snažit nalézt takové počáteční podmínky, při kterých bude pád co nejdelší.

Vzdálenost těžiště sekáčku od špičky označme l . Těžiště se bude pohybovat po oblouku kružnice a polohu sekáčku budeme popisovat vzdáleností těžiště od rovnovážné polohy po tomto oblouku (označme ji x). Dále pro jednoduchost předpokládejme, že hmotnost sekáčku m je soustředěná do těžiště. Tím jsme úlohu převedli na problém velmi připomínající matematické kyvadlo. Stejně jako u matematického kyvadla se omezíme na malé úhly¹ a provedeme linearizaci. Pohybová rovnice pak vypadá následovně.

$$\ddot{x} - \lambda^2 x = 0, \quad \text{kde } \lambda^2 = \frac{g}{l}.$$

Ty, kdo neví, že \ddot{x} je druhá derivace x podle času, tedy zrychlení, odkazujeme na seriál. Rovnice pro kyvadlo se od této liší jen kladným znaménkem a podobně kosmeticky vypadá i odlišnost řešení²

$$x = x_0 \cosh \lambda t + \frac{v_0}{\lambda} \sinh \lambda t$$

(v rovnici pro harmonické kmity nejsou hyperbolické, ale goniometrické funkce). Hyperbolické funkce lze vyjádřit pomocí lineární kombinace klesající a rostoucí exponenciály. Vzhledem k uvažovaným počátečním podmínkám je zřejmé, že klesající část můžeme zanedbat a řešení přepsat do tvaru

$$x = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{v_0}{\lambda} \right) e^{\lambda t}. \quad (3)$$

Nyní je vidět, že maximalizace doby pádu znamená minimalizaci výrazu v závorce. Dosaíme tedy za v_0 ze vztahu (2). Označíme-li $a^2 = \hbar/2m\lambda$, upraví se výraz v závorce do tvaru

$$a \left(\frac{x_0}{a} + \frac{a}{x_0} \right)$$

Tento výraz nabývá minima $2a$ pro $x_0 = a$. Kdo si to nedokáže zdůvodnit pomocí derivací, může ověřit

$$\frac{x_0}{a} + \frac{a}{x_0} = 2 + \left(\sqrt{\frac{x_0}{a}} - \sqrt{\frac{a}{x_0}} \right)^2,$$

z čehož je uvedený fakt viditelný na první pohled. Po dosazení dostává vztah pro pohyb „nejpomaleji padajícího“ sekáčku tvar $x = a e^{\lambda t}$. Dobu pádu můžeme odhadnout jako čas, ve kterém bude výchylka srovnatelná s l . Po krátkém výpočtu a dosazení hodnot $l = 20$ cm, $m = 200$ g dostáváme

$$T = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{l}{a} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \ln \frac{2ml\sqrt{gl}}{\hbar} = 5 \text{ s.}$$

Diskuse výsledku je snadná. Asi nejpodstatnějším závěrem je to, že přestože jsme uvažovali velmi idealizovaný model a neuvažovali početné vlivy vedoucí k pádu sekáčku (např. různé fluktuační proudění vzduchu apod.), lze z krátkého času usuzovat, že kvantové vlivy hrají i v tomto případě svou roli.

¹) S přesností na dvě platné cifry budou naše vztahy platit v rozmezí pár desítek stupňů, a když už se sekáček dostane tak daleko, spadne již téměř okamžitě.

²) Pilný čtenář může derivováním a dosazením do pohybové rovnice ověřit správnost tohoto vztahu.

Ještě zajímavější než samotná hodnota T je tvar výsledného vzorce. Před logaritmem stojí čas řádově odpovídající délce periody kmitů kyvadla délky l a v logaritmu je podíl veličiny rozměru momentu hybnosti sestavené z hodnot m , l , g (tedy pro „rozumné“ velikosti a hmotnosti veličina řádu jednotek J·s) a ve jmenovateli redukováná Planckova konstanta $\hbar \doteq 1 \cdot 10^{-34}$ J·s. Díky vlastnostem logaritmu nebude jeho hodnota extrémní (malá či velká) a hlavně bude velmi málo reagovat na změny parametrů (větší a těžší sekáčky apod.). To je také důvod, proč většině řešitelů vycházely podobné hodnoty, přestože jsme konkrétní čísla nezadali.

Jediným způsobem, jak udržet po delší dobu těleso v labilní poloze, je tedy menší podvod – je třeba systém sestavit tak, aby se nalézal v sice úzké, ale přesto stabilní³ poloze (což lze zajistit třeba ztupením hrotu sekáčku).

Honza Houšťek

`honza@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

³) Při velké snaze lze stabilní polohu nalézt dokonce i u tzv. Kolumbova vejce aniž by bylo nutné ho nakřápnout.