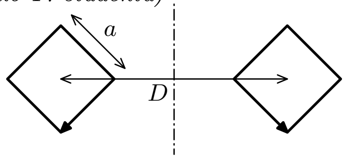
15. ročník, úloha VI . 4 ... *toroid* *(5 bodů; průměr ?; řešilo 17 studentů)*

Mějme cívku ve tvaru „hranatého toroidu“. Řez osou rotační symetrie je zakreslen na obr. 1. Vinutí toroidu má celkem N závitů a v naznačeném směru jím protéká proud o velikosti I/N. Spočtěte magnetické pole uvnitř toroidu a zdůvodněte správnost vašeho výpočtu.

Není-li vám cizí slovo integrál, můžete jako bonus spočítat i indukčnost toroidu.



Obr. 1

Úlohu můžeme snadno vyřešit pouze v případě, že počet závitů N je dostatečně velký. Za těchto okolností jsou siločáry magnetického pole kruhové. K řešení tedy můžeme použít Ampérův zákon. Jeho znění je

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I,$$

tj. integrál skalárního součinu $\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ po uzavřené křivce l ($\boldsymbol{H}$ je vektor intenzity magnetického pole $\mu \boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}$) je roven celkovému proudu protékajícímu přes plochu „napnutou“ na tuto křivku (je zajímavé, že tato hodnota nezávisí na konkrétní volbě tvaru plochy). Pokud tedy za křivku l zvolíme kružnici se středem na ose toroidu, budeme integrovat konstantní funkci a to $|\boldsymbol{H}|$. V případě, že naše kružnice bude ležet uvnitř toroidu, bude proud tekoucí jejím vnitřkem I. Dostáváme tedy

$$2\pi \varrho \boldsymbol{H} = I,$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} = \frac{\mu I}{2\pi \varrho},$$

kde ϱ je poloměr kružnice. Pokud bude kružnice ležet mimo toroid, bude proud tekoucí jejím vnitřkem nulový a tedy bude nulové i magnetické pole na této kružnici. Magnetické pole toroidu tedy vypadá tak, že v jeho vnitřku je stejné jako magnetické pole nekonečně dlouhého drátu ležícího na ose toroidu jímž protéká proud I. Vně toroidu pak bude pole nulové. Všimněte si, že pro výpočet jsme vůbec nepotřebovali znát tvar průřezu toroidu. Na tvaru průřezu tedy tento výsledek nezávisí. Indukčnost L můžeme spočítat pomocí vztahu pro energii cívky

$$E = \frac{1}{2} L \frac{I}{N}^{2}.$$

Stačí tedy spočítat závislost energie magnetického pole toroidu na proudu a porovnat ji s tímto vztahem. Hustota energie magnetického pole je

$$m = \frac{1}{2} \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B} = \frac{1}{2\mu} \boldsymbol{B}^2.$$

Celkovou energii pak určíme jako objemový integrál její hustoty. Využijeme-li poznatku, že m závisí pouze na vzdálenosti od osy ϱ, můžeme snadno převést objemový (tj. trojný) integrál na obyčejný. Celý toroid si nejprve rozdělíme na dvě části, a to na část pro kterou je $\varrho < D/2$, a na část pro kterou je $\varrho > D/2$. Energie magnetického pole v první části pak bude (pro zjednodušení označme $A = \frac{a\sqrt{2}}{2}$)

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \int_0^A \frac{1}{2\mu} \boldsymbol{B}^2 2\pi \left(\frac{D}{2} - A + x\right) 2x \,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{\mu I^2}{2\pi} \int_0^A \frac{x}{\frac{D}{2} - A + x} \,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{\mu I^2}{2\pi} \left(A + \left(A - \frac{D}{2}\right) \ln\left(\frac{D}{D - 2A}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Energii magnetického pole v druhé části toroidu pak můžeme spočítat analogicky. Dostáváme

$$
E_2 = \frac{\mu I^2}{2\pi} \left(\left(A + \frac{D}{2}\right) \ln\left(\frac{D + 2A}{D}\right) - A\right).
$$

Uvážíme-li, že celková energie mag. pole je součtem obou energií, dostáváme pro indukčnost toroidu

$$
L = \frac{\mu N}{\pi} D \ln\left(\frac{D + 2A}{D}\right).
$$

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.