

15. ročník, úloha VI. 2 ... RC obvod (4 body; průměr ?; řešilo 20 studentů)

Mějme sériový RC-obvod, který připojíme na zdroj periodického napětí s tzv. obdélníkovým průběhem, tzn. po čas $T/2$ je napětí U a po čas $T/2$ napětí $-U$. Jak bude vypadat průběh napětí na kondenzátoru?

Vymysleli Pavel Augustinský a Honza Houštěk.

Označme U vstupní napětí, U_R napětí na rezistoru, R jeho odpor, U_C napětí na kondenzátoru a C jeho kapacitu. Z druhého Kirchhoffova zákona plyne

$$U = U_R + U_C = RI + U_C,$$

$$U = R \frac{dQ}{dt} + U_C,$$

$$U = RC \frac{dU_C}{dt} + U_C.$$

Odtud separací proměnných získáváme

$$\int dt = RC \int \frac{dU_C}{U - U_C}.$$

$$t + K_1 = -RC \ln(U - U_C) + K_2,$$

kde K_1 a K_2 jsou integrační konstanty. Po jejich sloučení a úpravě dostaneme

$$U_C = U + K e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Z počátečních podmínek získáme $K = -U$ a můžeme tak pro první půlperiodu psát

$$U_C = U \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) + U_0(0),$$

respektive pro druhou půlperiodu

$$U_C = -U \left(1 - e^{-\frac{2t-T}{2RC}} \right) + U_0(T/2) = U \left(e^{-\frac{2t-T}{2RC}} - 1 \right) + U_0(T/2),$$

kde $U_0(t)$ je zůstatkové napětí na kondenzátoru. Během každé půlperiody se kondenzátor nabije na určitou hodnotu napětí, se kterou vstupuje do další půlperiody, $U_0(t)$ je tedy rovno napětí na kondenzátoru na konci předchozí půlperiody (na začátku je $U_0 = 0$).

Je zřejmé, že $U_0(t)$ závisí na vstupních podmínkách, kterými jsou perioda T , kapacita C a odpor R . Pro jednoduchost předpokládejme, že $T = 2RC$. Amplituda napětí na kondenzátoru $U_{C(A)}$ má pak konstantní velikost

$$U_{C(A)} = U \left(1 - \frac{1}{e} \right) \approx 0,6U.$$

Nalezení obecného řešení je poněkud obtížnější, sčítáme geometrickou řadu s kvocientem $e^{-\frac{t}{RC}}$ a převádíme na hyperbolický tangens. Výsledek má tvar

$$U_C = U \left[1 - \left(1 + \operatorname{tgh} \frac{T}{4RC} \right) e^{-\frac{t}{RC}} \right], \quad t \in (0; T/2),$$

respektive

$$U_C = -U \left[1 - \left(1 + \operatorname{tgh} \frac{T}{4RC} \right) e^{-\frac{2t-T}{2RC}} \right], \quad t \in \langle T/2; T \rangle.$$

V závislosti na vstupních podmínkách lze odvodit, že pro $T \gg RC$ bude U_C konvergovat k $\pm U$, ale s pomalejším nástupem změny. Naopak, pro $T \ll RC$ bude U_C konvergovat k 0 a závislost bude přímková.