15. ročník, úloha V . 3 ... *žebřík* *(4 body; průměr ?; řešilo 25 studentů)*

Mějme žebřík opřený o stěnu a podlahu (vše bez tření). Spočtěte, v jaké poloze se žebřík oddělí od svislé stěny (pro obecnou počáteční polohu žebříku). Prémii dostanete, spočtete-li, jak daleko od stěny žebřík dopadne. *Úloha napadla Rudu Sýkoru*

Nejprve si zavedeme značení. Máme žebřík o délce $2l$ a hmotnosti m. Úhel, který svírá žebřík se svislicí, si označíme φ. V těžišti žebříku působí síla $m\boldsymbol{g}$. V místě dotyku se stěnou působí žebřík na stěnu silou $\boldsymbol{F}_2$ a stěna na žebřík reakcí $\boldsymbol{R}_2 = -\boldsymbol{F}_2$. Podobně v místě dotyku s podlahou působí žebřík na podlahu silou $\boldsymbol{F}_1$ a podlaha na žebřík reakcí $\boldsymbol{R}_1 = -\boldsymbol{F}_1$. Síly $\boldsymbol{F}_2$ a $\boldsymbol{R}_2$ působí ve vodorovném směru a síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{R}_1$ ve svislém směru. Pro souřadnice těžiště platí

$$x = l \sin\varphi, \tag{1}$$

$$y = l \cos\varphi. \tag{2}$$

To znamená, že se těžiště pohybuje po kružnici s poloměrem l. Časovou derivací rovnic (1) a (2) zjistíme, jaké jsou vztahy pro rychlosti a zrychlení

$$\dot{x} = l\dot{\varphi}\cos\varphi, \tag{3}$$

$$\dot{y} = -l\dot{\varphi}\sin\varphi,$$

$$\ddot{x} = l(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi), \tag{4}$$

$$\ddot{y} = -l(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi). \tag{5}$$

Podle první a druhé věty impulzové platí

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2, \tag{6}$$

$$J\ddot{\varphi} = l(R_1\sin\varphi - R_2\cos\varphi), \tag{7}$$

kde J je moment setrvačnosti žebříku vzhledem k ose symetrie procházející těžištěm. Pro složky $\boldsymbol{a}$ z rovnice (6) proto platí

$$m\ddot{x} = R_2,$$

$$m\ddot{y} = R_1 - mg.$$

Po dosazení z (4) a (5) dostáváme

$$R_1 = mg - ml(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi),$$

$$R_2 = ml(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi). \tag{8}$$

Tyto rovnice dosadíme do (7) a získáme

$$J\ddot{\varphi} = ml(g\sin\varphi - \ddot{\varphi}l),$$

neboli

$$\ddot{\varphi} = \frac{mgl\sin\varphi}{\frac{4}{3}ml^2}. \tag{9}$$

kde jsme využili, že $J = ml^2/3$. Vynásobením předchozí rovnice φ a její integrací podle času dostaneme

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = -\frac{mgl\cos\varphi + C}{\frac{4}{3}ml^2}.$$

Integrační konstantu C určíme z počátečních podmínek, kdy je úhlová rychlost nulová. Platí tedy

$$\dot{\varphi}^2 = 2\frac{mgl(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}{\frac{4}{3}ml^2}. \tag{10}$$

Žebřík se neoddělí od stěny, dokud $R_2 > 0$. Užijeme-li vztah (8) pro R_2, dostaneme rovnici pro úhel φ, kdy dojde k oddělení žebříku

$$\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi = 0.$$

Dosadíme z (9), (10) a dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{mgl\sin\varphi_1}{\frac{4}{3}ml^2}\cos\varphi_1 - 2\frac{mgl(\cos\varphi_0 - \cos\varphi_1)}{\frac{4}{3}ml^2}\sin\varphi_1 &= 0,\\ \sin\varphi_1\cos\varphi_1 - 2(\cos\varphi_0 - \cos\varphi_1)\sin\varphi_1 &= 0,\\ \cos\varphi_1 &= \frac{2}{3}\cos\varphi_0.\end{aligned}$$

To znamená, že se žebřík oddělí od stěny v okamžiku, kdy jeho těžiště bude ve 2/3 počáteční výšky. Úhlovou rychlost při oddělení získáme z rovnice (10) jako

$$\dot{\varphi}_1 = \sqrt{2\frac{mgl(\cos\varphi_0 - \cos\varphi_1)}{\frac{4}{3}ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{2l\cos\varphi_0}}. \tag{11}$$

Po oddělení žebříku přestane působit síla $\boldsymbol{R}_2$ a pohybové rovnice se změní na tvar

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 0,\\ \ddot{y} &= R_1 - mg,\\ J\ddot{\varphi} &= R_1 l\sin\varphi.\end{aligned}$$

Protože se těžiště ve vodorovném směru pohybuje rovnoměrně, stačí spočítat čas pádu žebříku. Tento problém můžeme řešit v soustavě pohybující se ve vodorovném směru stejnou rychlostí jako těžiště žebříku. K výpočtu využijeme zákon zachování mechanické energie ve znění $E_{p0} + E_{k0} = E_p + E_k$. Potenciální energii můžeme napsat jako

$$E_p = mgy = mgl\cos\varphi.$$

Kinetická energie je

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}^2.$$

Protože je $\dot{y} = \dot{\varphi}l\sin^2\varphi$, můžeme kinetickou energii napsat ve tvaru

$$E_k = \frac{1}{6}ml^2(3\sin^2\varphi + 1).$$

Dosazením $\dot{\varphi}_1$ a φ_1 do vztahu pro E_k získáváme následující vyjádření počáteční kinetické energie

$$E_{k0} = \frac{mgl\cos\varphi_0}{9}(3 - \cos^2\varphi_0).$$

Zákon zachování energie má tedy tvar

$$mgl\left(-\frac{1}{9}\cos^3\varphi_0 + \frac{4}{3}\cos\varphi_0\right) = \frac{1}{6}ml^2\left(3\sin^2\ +1\right)\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi.$$

Odtud

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{6g(-\frac{1}{9}\cos^3\varphi_0 + \frac{4}{3}\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}{l(3\sin^2\varphi + 1)}}.$$

Dobu pádu žebříku můžeme tudíž vypočítat jako

$$t = \sqrt{\frac{l}{6g}}\int\limits_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{3\sin^2\varphi + 1}{\frac{1}{9}\cos^2\varphi_0 + \cos\varphi_0 - \cos\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi. \tag{12}$$

Po dopadu žebříku na podlahu bude vzdálenost jeho těžiště od stěny rovna

$$x_d = x_1 + t\dot{x}_1.$$

Do této rovnice dosadíme z rovnic (1), (3) a (11), čímž dostaneme vztah

$$x_d = l\sin\left(\arccos\left(\frac{2}{3}\cos\varphi_0\right)\right) + t\sqrt{\frac{2lg}{9}\cos^3\varphi_0}.$$

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.