15. ročník, úloha IV . S ... *rovnoměrně zrychlený pohyb* *(6 bodů; průměr ?; řešilo 27 studentů)*

Mějme volný hmotný bod, jehož klidová hmotnost je m_0 a který je v naší vztažné soustavě v klidu. V čase $t = 0$ začne na hmotný bod v našem systému působit konstantní urychlující síla o velikosti F.

a) *Vypočtěte časovou závislost rychlosti hmotného bodu v naší soustavě. Z této závislosti určete zrychlení hmotného bodu vůči našemu systému. (Řešte pouze pro časy $t > 0$.)*
b) *V každém okamžiku můžeme s uvažovaným hmotným bodem spojit tzv. klidovou inerciální soustavu. Jak již název napovídá, jedná se o inerciální systém, ve kterém je hmotný bod v daném okamžiku v klidu. S jakým zrychlením se hmotný bod pohybuje ve svých klidových soustavách? Jak velká síla na něj v těchto systémech působí?*

a) Pohybovou rovnici hmotného bodu lze v tomto případě vyřešit jednoduše, protože je působící síla konstantní. Časová závislost hybnosti $p(t)$ hmotného bodu je tedy dána vztahem (podle zadání řešíme pouze pro $t > 0$)

$$p(t) = Ft \quad \Rightarrow \quad \frac{m_0 v(t)}{\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}} = Ft.$$

Pro rychlost hmotného bodu v naší vztažné soustavě tedy platí vztah

$$v = c\frac{\frac{Ft}{m_0 c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_0 c}{Ft}\right)^2}}.$$

Z tohoto vztahu vidíme, že ani stále působící síla libovolné velikosti není schopna urychlit částici na světelnou popřípadě nadsvětelnou rychlost.

Zrychlení a hmotného bodu v našem systému získáme derivací jeho rychlosti podle času

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}\frac{v^3}{c^2}\frac{2m_0 c}{Ft}\left(-\frac{m_0 c}{Ft^2}\right) = \frac{v}{t}\cdot\frac{\left(\frac{m_0 c}{Ft}\right)^2}{1 + \left(\frac{m_0 c}{Ft}\right)^2} = \frac{v}{t}\cdot\frac{1}{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2}.$$

b) Okamžitá klidová inerciální soustava pohybujícího se hmotného bodu se vůči nám pohybuje rychlostí v ve stejném směru jako uvažovaný hmotný bod. Za čas $\mathrm{d}t$ se rychlost hmotného bodu v naší soustavě zvětší o $\mathrm{d}v$. Odpovídající změnu rychlosti $\mathrm{d}u$ v klidové soustavě hmotného bodu dostaneme užitím vztahu pro skládání rychlostí

$$\mathrm{d}u = \frac{(v + \mathrm{d}v) - v}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \gamma^2 \mathrm{d}v.$$

K této změně rychlosti hmotného bodu v jeho klidové soustavě dojde za čas $\mathrm{d}\tau$. Vztah mezi časovými intervaly $\mathrm{d}t$ a $\mathrm{d}\tau$ je dán dilatací času $\mathrm{d}t = \gamma \mathrm{d}\tau$, neboť časový rozdíl $\mathrm{d}\tau$ odpovídá v klidové soustavě hmotného bodu soumístným událostem (rychlost hmotného bodu je v jeho klidovém systému nulová). Pro zrychlení hmotného bodu a' v jeho klidové inerciální soustavě tedy platí

$$a' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \gamma^3\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \gamma^3 a.$$

Časovou závislost faktoru γ odpovídajícího pohybu hmotného bodu v naší soustavě získáme dosazením časové závislosti rychlosti hmotného bodu do definičního vztahu faktoru γ

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{m_0 c}{Ft}\right)^2}}{\frac{m_0 c}{Ft}} = \sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2}.$$

Pro časovou závislost zrychlení hmotného bodu v jeho klidovém systému tudíž dostáváme

$$a' = \sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2}\,\frac{v}{t} = \frac{c}{t}\,\frac{Ft}{m_0 c} = \frac{F}{m_0}.$$

Vidíme tedy, že zrychlení hmotného bodu je v jeho klidových soustavách konstantní. Proto se tento pohyb nazývá rovnoměrně zrychlený.

V okamžitých klidových systémech působí na hmotný bod síla F', jejíž velikost obdržíme užitím pohybové rovnice

$$F' = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v' + ma' = m_0 a' = F.$$

První člen pohybové rovnice je v okamžité klidové soustavě nulový, protože hmotný bod je v tomto systému v klidu. V tomto případě nám náhodou vyšlo, že působící síla je v okamžitých klidových soustavách stejně velká jako v naší soustavě. Obecně se však při Lorentzově transformaci směr a velikost působících sil mění, což je například vidět z transformačních vztahů pro sílu získaných v rámci pomalé Lorentzovy transformace. (Při Galileiho transformaci se směr a velikost sil zachovává.)

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.