15. ročník, úloha IV . 3 ... světelný motor *(4 body; průměr ?; řešilo 24 studentů)*

Uvažujte Carnotův cyklus (adiabatický–izotermický–adiabatický–izotermický děj) s tepelným elektromagnetickým zářením. Stavová rovnice pro tepelné záření má tvar $p = \frac{1}{3}u\,(T)$, kde p je tlak záření a u je jeho hustota energie, která závisí pouze na jeho termodynamické teplotě T. Pro adiabatický děj s tepelným zářením platí $pV^{4/3}$ = konst. Vypočítejte účinnost tohoto cyklu jako funkci $u\,(T_1)$ a $u\,(T_2)$, kde T_1 je teplota ohřívače a T_2 teplota chladiče. Pro libovolný Carnotův cyklus je jeho účinnost dána vztahem $1 - T_2/T_1$. Porovnáním těchto vztahů pro účinnost cyklu odvoďte, že hustota energie záření u je přímo úměrná T^4.

Navrhl Karel Kolář

V následujících úvahách budeme uvažovat Carnotův cyklus začínající v bodě 1 izotermickou expanzí a končící ve stejném bodě adiabatickou kompresí. Teplota ohřívače je T_1 , T_2 teplota chladiče, Q_1 je teplo dodané ohřívačem a Q_2 je teplo odevzdané chladiči. Účinnost Carnotova cyklu je definována jako podíl vykonané práce a tepla dodaného stroji, neboli

$$\eta = \frac{W}{Q_1}. \tag{1}$$

Abychom nemuseli počítat práci za celý cyklus, využijeme I. větu termodynamickou, která zní

$$Q = \Delta U + W.$$

Protože studujeme uzavřený cyklus, je ΔU rovno nule. Proto je celková práce stroje rovna celkovému teplu přijatému pracovní látkou, což je teplo dodané teplejší lázní plus teplo odevzdané chladiči (které je ovšem záporné), tedy

$$W = Q_1 + Q_2.$$

Během adiabatického děje k tepelné výměně nedochází. Dosazením za W do (1) obdržíme

$$\eta = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}. \tag{2}$$

V průběhu izotermického děje je teplota konstatní, a proto zůstává konstantní i hustota energie a tlak, který je jí přímo úměrný. Celková vnitřní energie U se však mění, protože se mění objem záření. Podle I. věty termodynamické musí platit

$$Q = \Delta U + W = u(T)\Delta V + p\,\Delta V = \frac{4}{3}u(T)\Delta V.$$

A tedy $Q_1 = \frac{4}{3}u(T_1)(V_2 - V_1)$ a $Q_2 = \frac{4}{3}u(T_2)(V_4 - V_3)$.

Při adiabatických dějích platí $pV^{4/3}$ = konst. Speciálně

$$p_1 V_2^{4/3} = p_2 V_3^{4/3},$$
$$p_2 V_4^{4/3} = p_1 V_1^{4/3}.$$

Proto platí

$$(V_4 - V_3) = -\left(\frac{u(T_1)}{u(T_2)}\right)^{3/4} (V_2 - V_1).$$

Po dosazení do (2) získáme

$$\eta = 1 + \frac{u(T_2)}{u(T_1)} \frac{V_4 - V_3}{V_2 - V_1} = 1 - \left(\frac{u(T_2)}{u(T_1)} \right)^{1/4} .$$

Protože účinnost libovolného Carnotova cyklu je $1 - T_2/T_1$, musí pro libovolné dvě teploty T_1 a T_2 platit

$$\frac{T_2^4}{u(T_2)} = \frac{T_1^4}{u(T_1)},$$

což lze splnit pouze tehdy, budou-li se oba zlomky rovnat společné konstantě. Z toho už plyne $u(T) \sim T^4$.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.