15. ročník, úloha III . 4 ... přesnost GPS *(5 bodů; průměr ?; řešilo 20 studentů)*

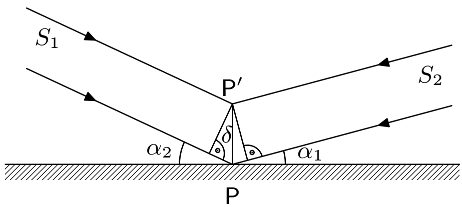
Tzv. Global Positioning System (GPS) pracuje na jednoduchém principu. Družice pohybující se na 12-ti hodinových drahách vysílají přesně synchronizovaně signály, které příjmač detekuje. Protože na příjmači nejsou absolutně přesné hodiny, lze měřit jen rozdíly vzdáleností od různých satelitů. Čtyři satelity stačí na dopočtení polohy. Poloha satelitů se změří ze Země stejným způsobem.

Zdůvodněte, proč je přesnost GPS v horizontálním směru znatelně vyšší než ve vertikálním směru. *Při hledání informací o GPS zaujalo Honzu Houšťka.*

Udělejme si jasno, jak systém GPS funguje. Dvanáctihodinové době oběhu družic GPS odpovídá vzdálenost přibližně $4R_z$ od středu Země. Družice vysílají synchronizované signály s kódovanou pozicí a časem emitace. Tento čas odčítavají ze svých atomových hodin na palubě, jejichž nepřesnost se pohybuje kolem 3 ns.

Přijímač zaznamená signál od satelitu a na svých hodinách odečte čas příjmu, který je vzhledem k menší přesnosti jeho hodin zatížen větší chybou než čas měřený satelity. Lidé našli způsob, jak obejít nedosažitelnost přesnosti srovnatelné s atomovými hodinami na běžném přijímači. Stačí měřit rozdíly časů, čímž se eliminuje systematická chyba hodin přijímače a přesnost stoupne na úroveň atomových hodin. Z těchto rozdílu určí přijímač svou pozici jen, když má k dispozici 4 satelity (kdyby měl jen dva, věděl by, že je někde na ploše rotačního hyperboloidu, v případě tří by mu ještě zbývaly nějaké blíže neurčené křivky).

Teď se podívejme na to, jak závisí přijímačem měřený rozdíl vzdáleností od dvou satelitů, např. S_1 a S_2, na posunu přijímače v horizontálním resp. vertikálním směru. Zajímá nás poměr vertikální a horizontální změny rozdílu jejich vzdáleností. Pro bod na zemském povrchu je vzdálenost k satelitu minimální v nadhlavníku – $3R_z$, a maximální pro satelit nad horizontem – $3,9R_z$. Vyšetřeme vertikální posun o δ, řádově menší než je vzdálenost od satelitů. Dráhy signálů pro původní polohu přijímače P i novou polohu P' jsou pak téměř rovnoběžné (obr. 1). Vzdálenost přijímače od S_2 se zmenší o $\delta \sin \alpha_2$, od S_1 podobně o $\delta \sin \alpha_1$. Rozdíl vzdáleností se tedy změní o



Obr. 1. . Geometrie posunu

$$\Delta x_\mathrm{v} = -\delta \sin \alpha_2 + \delta \sin \alpha_1 .$$

Podobnou úvahou pro horizontální změnu o δ zjistíme změnu rozdílu

$$\Delta x_\mathrm{h} = \delta \cos \alpha_2 + \delta \cos \alpha_1 .$$

Užitím vztahu pro rozdíl sinů a součet kosinů dvou úhlů dostaneme pro jejich poměr p vztah

$$p = \frac{\Delta x_\mathrm{v}}{\Delta x_\mathrm{h}} = \mathrm{tg}\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right) .$$

Vertikální přesnost je menší než horizontální, je-li $-1 < p < 1$, tedy $-\frac{\pi}{2} < \alpha_1 - \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$. To ale platí pro všechny možné α_1, α_2, které jsou z intervalu $(0, \pi/2)$. Hrubým odhadem je hodnota p někde ve středu, což znamená, že GPS je průměrně dvakrát přesnější horizontálně než vertikálně.

Ještě by bylo zajímavé spočítat, o kolik se průměrně liší jednotlivé přesnosti, určit střední hodnotu absolutní hodnoty poměru p. Pomůže nám poměrně jednoduchá úvaha. Měli bychom udělat průměr přes všechny dvojice úhlů α_1, α_2. Pro tyto dvojice jsou ale opačné $\alpha = (\alpha_1 - \alpha_2)/2$ rovnako početné. Tedy střední hodnotu poměru p počítáme jako

$$\langle p \rangle = \int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}(\alpha) d\alpha.$$

Substitucí $t = \cos(\alpha)$ okamžitě dostaneme primitivní funkci $-\ln(\cos(\alpha))$. Po dosazení mezí 0 a $\pi/4$ vyjde $\langle p \rangle = 4\ln(2)/\pi \approx 0,44$. Můžeme tedy konstatovat, že vertikální přesnost je průměrně přibližně poloviční.

Zajímavé je, že do přesnosti GPS mnoho mluví i obecná teorie relativity. Totiž jak hodiny satelitů, tak i přijímače se pohybují a jsou v centrálním gravitačním poli Země. Kdyby se nedělaly výpočty s užitím Schwarzschildovy metriky, která popisuje plynutí času v pohybující se soustavě v centrálním gravitačním poli, nebylo by možné zaměřit nic z přesností lepší než pár kilometrů.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.