15. ročník, úloha II . P ... chladič *(5 bodů; průměr ?; řešilo 51 studentů)*

Představte si chladič, který jistě používáte v chemických laboratořích. Jsou to dvě souosé trubky, mezi nimi teče chladící kapalina (ve vnitřní trubce teče kapalina chlazená). Naší otázkou je, zda je chlazení kapaliny účinnější, tečou-li kapaliny proti sobě či souběžně. Nezapomeňte popsat za jakých zjednodušujících předpokladů úlohu řešíte.

Jako úlohu na jednoduché zamyšlení navrhl Lukáš Schmiedt

Tuto úlohu je možno řešit kvalitativně či kvantitativně nebo se ji pokusit modelovat na počítači. Nejprve uveďme kvalitativní řešení. V celém řešení budeme uvažovat jen přenos tepla přes stěnu mezi kapalinami, předpokládat nezávislost rychlosti a teploty dané kapaliny na vzdálenosti od osy chladiče a veškeré další jevy zanedbáme (vedení tepla kapalinou ve směru osy apod.)

Lze vyjít například z toho, že účinnost chlazení závisí na rozdílu teplot látek. Ta je na začátku „souběžného“ chladiče vysoká, pak ale rychle klesá a pro dostatečně dlouhý chladič (vzhledem k jeho konstrukci a vlastnostem látek, např. průtokům kapalin a jejich tepelným kapacitám) se blíží nule (teploty kapalin se vyrovnávají). Pro teplotu chlazené kapaliny na výstupu bude platit $T_2^{(0)} > T > T_1^{(0)}$, kde $T_{1,2}^{(0)}$ jsou vstupní teploty chladící, resp. chlazené vody. Pro „protiběžný“ chladič se bude účinnost udržovat na stále stejné úrovni a za stejných předpokladů jako výše dostaneme $T \to T_1^{(0)}$.

Na situaci se také můžeme podívat z pohledu chladící kapaliny. U „souběžného“ chladiče je hned na vstupu ohřáta a pak kolem ní protéká již částečně tepla zbavená chlazená kapalina a jejich teploty se pomalu vyrovnávají. Pro „protiběžný“ chladič se při svém vstupu chladící kapalina setkává s tekutinou téměř stejné teploty, od které se zanedbatelně ohřeje (a kterou trochu ochladí) a při svém dalším průtoku chladičem se setkává s kapalinou, od které odebírá (přibližně) stále stejné množství tepla (na jednotku délky či času).

Je tedy zřejmé, že za výše uvedených podmínek (dostatečně dlouhý chladič) je výhodnější použít „protiběžný“ chladič. Pokusme se nyní o kvantitativní řešení.

Uvažujme (prozatím souběžný) pohyb tekutin na malém úseku trubice. V této oblasti dojde přes stěnu trubice k předání energie z teplejší kapaliny do chladnější o velikosti $\Delta Q = k[T_2(x) - T_1(x)]$, kde k je koeficient obsahující velikost a termické vlastnosti trubice (např. pro válcový tvar roste lineárně s r). Díky tomuto transportu energie v příslušné části chlazené kapaliny poklesne celková energie (tj. $\Delta Q = -\nu_2 c_2 T_2'(x)$) a energie chladící kapaliny vzroste (tj. $\Delta Q = \nu_1 c_1 T_1'(x)$), přičemž $\nu_{1,2}$ jsou hmotnostní toky kapalin a $c_{1,2}$ jejich měrné tepelné kapacity. Získáme tedy soustavu diferenciálních rovnic

$$k\left[T_2(x) - T_1(x)\right] = -\nu_2 c_2 \frac{\mathrm{d}T_2(x)}{\mathrm{d}x},$$

$$k\left[T_2(x) - T_1(x)\right] = \nu_1 c_1 \frac{\mathrm{d}T_1(x)}{\mathrm{d}x}.$$

Tuto soustavu nejsnáze vyřešíme tak, že z první rovnice vyjádříme T_1 (zde a dále již nebudeme pro přehlednost vypisovat závislost na x) a dosadíme do rovnice druhé, čímž obdržíme jednu rovnici druhého stupně tvaru $T_2''(x) + aT_2'(x) = 0$, která má obecné řešení (pro $a \neq 0$, $a = 0$ není fyzikálně výhodné – odpovídá špatným chladícím schopnostem „souběžného“ chladiče)

$$T_2(x) = C_1 + C_2 e^{-ax}, \qquad (1)$$

$$a = \frac{k(\nu_1 c_1 + \nu_2 c_2)}{\nu_1 \nu_2 c_1 c_2}.$$

Dosazením do vztahu pro T_1 vyjádřeného pomocí T_2 a jeho derivací obdržíme

$$T_1(x) = C_1 + C_2 b e^{-ax}, \qquad b = -\frac{\nu_2 c_2}{\nu_1 c_1}. \tag{2}$$

Konstanty $C_{1,2}$ získáme z počátečních podmínek $T_1(0) = T_1^{(0)}$ a $T_2(0) = T_2^{(0)}$ – dosadíme do rovnic $x = 0$ a vyjádříme $C_{1,2}$ (soustava dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé). Takto získáme výrazy pro průběh teploty kapalin podél délky chladiče. Nás konkrétně zajímá $T_2(L) - T_2^{(0)}$, což je rozdíl teplot vytékající a vtékající chlazené kapaliny u „souběžného“ chladiče. Po algebraických úpravách získáme

$$T_2(L) - T_2^{(0)} = \left(T_2^{(0)} - T_1^{(0)}\right) \frac{-1 + e^{-aL}}{1 - b}. \tag{3}$$

Pokud chladící kapalinu necháme vtékat do chladiče z opačné strany („protiběžný“ chladič), tak v našem výpočtu budou dvě změny – opačné znaménko u ν_1 a počáteční podmínka pro chladící kapalinu $T_1(L) = T_1^{(0)}$. Faktory a a b budou mít tedy tvar (změna dána $\nu_1 \to -\nu_1$)

$$a^* = -\frac{k(\nu_2 c_2 - \nu_1 c_1)}{\nu_1 \nu_2 c_1 c_2}, \qquad b^* = \frac{\nu_2 c_2}{\nu_1 c_1}$$

a rovnice (1) a (2) spolu s odlišnou počáteční podmínkou po upravách dají analogii (3)

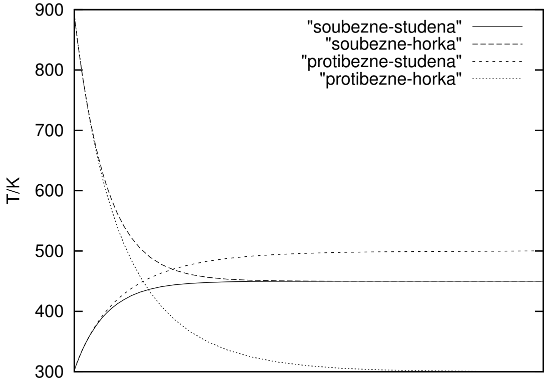
$$T_2(L) - T_2^{(0)} = \left(T_2^{(0)} - T_1^{(0)}\right) \frac{-1 + e^{-a^* L}}{1 - b^* e^{-a^* L}}. \tag{4}$$

Podělením rovnice (4) rovnicí (3) zjistíme, který způsob chlazení je účinnější – pokud bude výsledek větší než jedna, pak je vhodnější použít „protiběžný“ chladič a naopak. Bude-li se výsledek záviset na L, pak pro některé délky chladiče bude výhodnější jeden a pro jiné druhý způsob proudění. Podělením vztahů dostaneme výraz (využili jsme $b^* = -b$)

$$\frac{-1 + e^{-a^* L}}{1 - b^* e^{-a^* L}} \left(\frac{-1 + e^{-aL}}{1 - b}\right)^{-1} = \frac{-1 + e^{-a^* L}}{-1 + e^{-aL}} \frac{1 - b}{1 + b e^{-a^* L}}.$$

Analýza tohoto výrazu není jednoduchá, ale lze ukázat, že v limitě skutečného chladiče $\nu_2 c_2 \ll \nu_1 c_1 \Rightarrow b \to 0$ (chladící kapalinou je rychle proudící voda s vysokou měrnou tepelnou kapacitou) je celý výraz větší než 1.

Numerickou modelaci vidíte (konkrétně závislost teplot vytékajících kapalin na délce chladiče, což není totéž jako závislost teploty v chladiči při jeho konstantní délce) na obr. 1. Sbíhající se křivky patří „souběžnému“ chladiči, křížící se „protiběžnému“. Pro modelaci bylo použito $\nu_1 = 3\nu_2$, jinak stejné vlastnosti.



Obr. 1. Závislost konečných teplot na délce trubice