15. ročník, úloha I . E ... *tání ledu* *(8 bodů; průměr ?; řešilo 53 studentů)*

Připravte si různě veliké ale geometricky podobné kusy ledu (kostky, koule, ...) a změřte závislost rychlosti jejich tání ve vodě (pokud možno stálé teploty) na jejich velikosti. Výsledky se pokuste interpretovat. *Úlohu vymyslela Lenka Zdeborová.*

Teorie

Mějme ve vodě teploty T kus ledu typického rozměru a – hrana krychle, poloměr koule apod. Předpokládejme, že led je zahřátý na teplotu tání. Nechť za malý čas Δt odtaje objem vody ΔV. Tento objem je úměrný množství tepla, které se za jednotku času přivede z okolí. Předpokládáme-li, že voda má (kromě velmi slabé vrstvičky kolem ledu) konstantní teplotu, bude množství tohoto tepla záviset pouze na tepelné vodivosti vody, koeficientu přestupu tepla z vody do ledu a samozřejmě na velikosti povrchu ledu. Dostáváme tedy úměrnost

$$\Delta V \sim a^2 \Delta t. \tag{1}$$

Nyní vyjádřeme ΔV pomocí rozměru a (počítejme pro krychli, pro všechny ostatní tvary obdobně) $\Delta V = (a + \Delta a)^3 - a^3 = 3a^2 \Delta a + 3a(\Delta a)^2 + (\Delta a)^3 \approx 3a^2 \Delta a$, kde poslední přibližná rovnost plyne z toho, že Δa předpokládáme malé oproti a. Celkově tedy dosazením do vztahu (1) máme po zkrácení a^2

$$\Delta a \sim \Delta t.$$

Jsou-li si úměrné elementární změny nějakých veličin, jsou si úměrné i celkové změny. Z toho plyne, že závislost doby t, za kterou roztaje kus o velikosti a, by měla být tvaru $t = ka$, kde k je konstanta obsahující mj. skupenské teplo tání ledu, koeficient přestupu tepla z vody do ledu, tepelnou vodivost ledu a konstanty charakterizující tvar ledu.

Postup a výsledky měření

Prvním problémem realizace tohoto pokusu je vyrobit ony geometricky podobné, různě veliké, útvary z ledu. Možnosti máme v zásadě dvě.

Buď vyrobíme několik stejně velikých útvarů a menší získáme tak, že ony vyrobené necháme odtát. Při tání se však pokazí geometrická podobnost s původním objektem, z pěkné pravoúhlé krychličky se stane zaoblená krychlička. Jediné těleso, které nezmění tvar, je koule, ta se ale zase obtížně vyrábí.

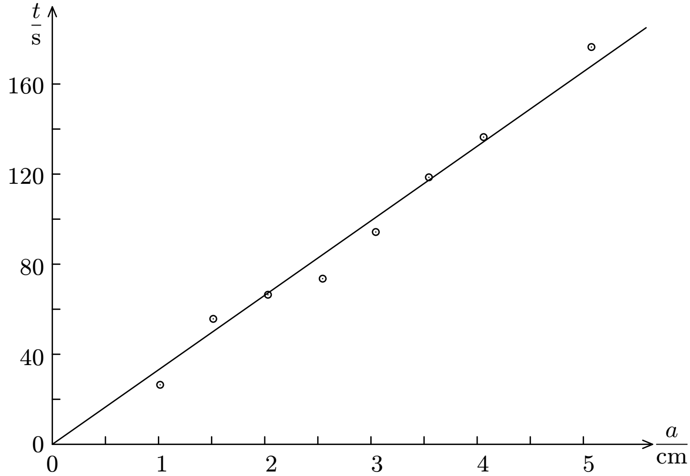
Druhou možností je vyrobit, či jinak sehnat, různě veliké geometricky podobné formičky a v nich nechat vodu zmrznout. My jsme si pro realizaci vybrali tuto možnost a inspirovali jsme se nápadem Honzy Prachaře. Ten si z tvrdého papíru vyrobil formičky, které izoloval igelitem. Krychličky s mrznoucí vodou jsme nechali v mrazáku pro jistotu skoro celý den.

Máme-li tedy v mrazáku vhodné různě veliké geometricky podobné krychličky, můžeme se vrhnout na experimentování. Do velké nádoby jsme napustili vodu pokojové teploty a ponořili do ní teploměr. Teplota vody byla 22 °C. Abychom ji mohli během pokusu udržovat konstantní, připravili jsme si zároveň konvici horké vody na dolévání. Pro každou krychličku jsme postupovali následovně, vyndali jsme kostku z mrazáku a sundali z ní igelit, nechali jsme ji ohřát natolik, aby odtála malá povrchová vrstvička a z kostky se dala sundat papírová formička. Kostku jsme vhodili do kýble, neustále vodu míchali, aby rozdíl teplot mezi povrchem kostky a okolní vodou byl pokud možno stále stejný, a aby jedna stěna kostičky nevyčnívala nad hladinu, a přitom měřili čas, za který kostka roztála. Dostali jsme následující hodnoty.

a[cm]	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	5
t[s]	26	55	66	73	93	117	135	174

Doby tání kostiček.

Rozměr kostky a jsme určovali s přesností ± 2mm, formičky byly sice vyrobeny přesně, ale voda se při mrznutí rozpínala a formičky se vyboulily. Rovněž hladina vody nebyla přesně ve výšce a, ale o něco níže. Chybu měření času odhadneme na ± 3s. Ta plyne z faktu, že se nedalo zcela přesně určit, kdy už ve vodě není žádný led.



Obr. 1. Závislost t na a.

Hodnoty z tabulky jsme vynesli do grafu. Je vidět, že skutečně data leží na přímce jdoucí počátkem tak, jak předpovídá teorie. Experimentálními daty v grafu proložíme tzv. regresní přímku, tj. přímku, pro kterou platí, že součet čtverců odchylek experimentálních bodů od ní je minimální. Součet čtverců odchylek v našem případě je $\sum_{i=1}^{8} (t_i - ka_i)^2$, kde t_i je doba tání kostičky o poloměru a_i, k je směrnice přímky. Nejlepší k, jaké pro naše data můžeme najít, je $k = 32{,}2\,\mathrm{s{\cdot}cm^{-1}}$. Parametry regresní přímky spočítá každá rozumná kalkulačka a každý program, který umí nakreslit onen graf. Důležitým parametrem lineární regrese je tzv. korelační koeficient r, který udává, jak moc dobře naměřená závislost odpovídá přímce. V ideálním případě je $r = 1$, v uspokojivých případech je r alespoň 0,98. Pro naše data je $r = 0{,}993$, což velmi dobře potvrzuje naši domněnku o lineární závislosti času tání na velikosti kostky.

Diskuse a závěr

Měření výborně korespondují s teorií. Odchylky experimentálních bodů od regresní přímky jsou většinou větší, než by dovolovaly výše uvedené chyby a a t, to může býti způsobeno tím, že kostky při tání nezachovávají přesně geometrickou podobnost (zaoblují se), ač v teoretickém výpočtu jsme to předpokládali. Dále jsme neuvažovali, že uvnitř kostky není nulová teplota, a tedy se část tepla spotřebuje na její ohřátí. Zanedbali jsme též změny teploty okolní kapaliny (snažili jsme se je eliminovat, ale jistě ne dokonale).

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.