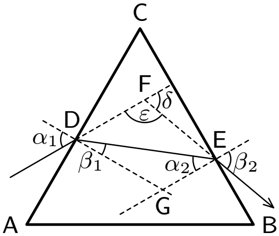
15. ročník, úloha I . 4 ... *hranol* *(4 body; průměr ?; řešilo 56 studentů)*

Mějme pravidelný trojboký hranol o indexu lomu n. Na jednu jeho stěnu dopadá paprsek světla a vychází druhou stěnou. Spočtěte úhel odchýlení δ paprsku od původního směru v závislosti na natočení hranolu. Kdy bude δ maximální? *Úlohu zadali Lenka a Honza.*

Vzhledem k tomu, že ve svislém směru je hranol izotropní, budeme úlohu řešit v rovinném řezu, tedy v rovnostranném trojúhelníku ABC. První aproximací problému je neuvažování vlnových vlastností světla, čili neuvažování disperze. K řešení této úlohy využijeme obrázku 1.



Obr. 1

Hledání závislosti deviace δ na otočení hranolu jste pojali různě: někteří otáčeli hranolem a jako otočení pak brali úhel svíraný jednou stranou trojúhelníku po otočení s její počáteční polohou, jiní z vás zase toto otočení chápali jako úhel mezi počáteční a pootočenou polohou výšky na jednu ze stran trojúhelníku. Nejjednodušší však bylo prohlásit hranol za nehybný a otáčet paprskem, čili hledat závislost δ na α_1 (někteří našli závislost na β_1, což je sice také správně, avšak pokud chceme závislost pouze na vstupních podmínkách, je závislost na α_1 lepší). Z $\triangle$DEF vyplývá

$$\varepsilon = \pi - (\alpha_1 - \beta_1) - (\beta_2 - \alpha_2),$$

$$\delta = \pi - \varepsilon = \pi - \pi + (\alpha_1 - \beta_1) + (\beta_2 - \alpha_2) = \alpha_1 + \beta_2 - (\beta_1 + \alpha_2).$$

Z $\triangle$DEG pak plyne, že $\beta_1 + \alpha_2 = \pi/3$ a rovnici pro δ můžeme přepsat na tvar

$$\delta = \alpha_1 + \beta_2 - \frac{\pi}{3}. \tag{1}$$

Pro lom na straně AC platí

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = n \Rightarrow \beta_1 = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha_1}{n}\right)$$

a tedy

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{3} - \beta_1 = \frac{\pi}{3} - \arcsin\left(\frac{\sin\alpha_1}{n}\right).$$

Vzhledem k tomu, že hranol má jistě větší optickou hustotu než okolní vzduch ($n > 1$), může na hraně BC dojít k úplnému odrazu. Tento případ musíme vyloučit, protože δ by byl nekonvexní úhel a odchylka by neměla smysl

$$\alpha_2 < \alpha_m,$$

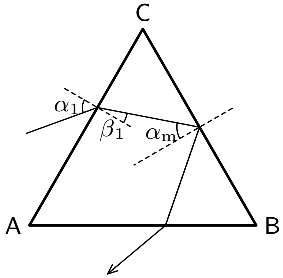
$$\frac{\pi}{3} - \beta_1 < \arcsin\frac{1}{n},$$

$$\arcsin\left(\frac{\sin\alpha_1}{n}\right) > \frac{\pi}{3} - \arcsin\frac{1}{n},$$

$$\sin\alpha_1 > n\sin\left(\frac{\pi}{3} - \arcsin\frac{1}{n}\right),$$

$$\alpha_1 > \arcsin\left[n\sin\left(\frac{\pi}{3} - \arcsin\frac{1}{n}\right)\right]. \tag{2}$$

Toto je nerovnost se dvěma parametry α_1 a n (v zadání není nikde řečeno, že hranol je vyroben ze skla o indexu lomu $n = 1{,}5$). Než si omezovat definiční obor α_1, je rozumnější provést diskusi vzhledem k n.



Obr. 2

Protože z $\triangle$DEG vyplývá, že $\beta_1 \in \langle 0; \pi/3 \rangle$ a $\alpha_1 \in (0; \pi/2\rangle$, dostáváme pro n podmínku $n \in \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; 2\right)$.

Vraťme se nyní zpět k rovnici (1). Mnozí z vás ji prohlásili za výsledek první části úlohy. My však hledáme závislost na α_1, takže i β_2 musíme vyjádřit pomocí α_1.

Protože $\alpha_1 = \frac{\pi}{3} - \beta_1$ a $\beta_2 = \arcsin(n \sin \alpha_2)$, můžeme psát

$$\beta_2 = \arcsin[n \sin(\pi/3 - \beta_1)] = \arcsin\left[n \sin\left(\frac{\pi}{3} - \arcsin\left(\frac{\sin \alpha_1}{n}\right)\right)\right]$$

a tedy

$$\delta = \alpha_1 - \frac{\pi}{3} + \arcsin\left[n \sin\left(\frac{\pi}{3} - \arcsin\left(\frac{\sin \alpha_1}{n}\right)\right)\right].$$

Druhá část, tedy hledání úhlu α_1 při němž bude δ maximální, odradila mnoho řešitelů. Zkušenější řešitelé zavětřili hledání extrémů funkcí a začali derivovat. Jenomže v nulových bodech první derivace je druhá derivace větší než nula, takže nalezené kořeny byly minimy. V tuto chvíli šlo provést důkladný teoretický rozbor funkce $\delta(\alpha_1)$, tak jak to (správně) provedl Miroslav Hejna a dospět k výsledku $\alpha_1 = \pi/2$, který se nabízí jako potenciální řešení už z obrázku.

Protože nelze předpokládat, že umíte derivovat v takovém rozsahu, nabízí se několik variant řešení druhé části úlohy. Jako úplně postačující řešení byla i tabulková metoda, a kdo si chtěl trochu pohrát, nakreslil (nebo vytiskl) nám graf (těch pravda mnoho nebylo).

Je třeba zmínit ještě jednu důležitou věc. Vstupnímu úhlu $\alpha_1 = \pi/2$ odpovídá v závislosti na n určitý výstupní úhel $\beta_2 = \arcsin\left[n \sin\left(\pi/3 - \arcsin\left(1/n\right)\right)\right]$. Na základě zákona záměnnosti chodu paprsků je nutně i tento úhel řešením! Závěrem je tedy, že δ bude maximální, když vstupní úhel bude roven buď $\pi/2$ anebo $\arcsin\left[n \sin\left(\pi/3 - \arcsin\left(1/n\right)\right)\right]$ (v tom případě bude mít hodnotu $\pi/2$ výstupní úhel).

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.