

Zadání IV. série



Termín odeslání: 4. března 2002

Milí přátelé!

Nejprve bychom se vám chtěli omluvit za nedostatek času, který jste měli na řešení předchozí série, a který byl zaviněn námi jen z části (ale učinili jsme opatření, aby se podobná situace neopakovala).

Na poslední stránce brožurky najdete malou anketu a soutěž. Stránku můžete odstříhnout a poslat nám ji s řešením.

Se zadáním čtvrté série FYKOSu si vás dovoluujeme pozvat na naši tradiční akci – Den s experimentální fyzikou. Bude se konat dne 20. března 2002 v budově UK MFF v Tróji. Na tuto akci se můžete přihlásit na naši e-mailovou adresu, nebo klasickou poštou (ale tak, aby nám dopis došel do 7. března). Se zadáním další série dostanou ti, kdo se přihlásí, podrobnější program s popisem cesty do Tróje a omluvenku do školy. Již dnes vám můžeme slíbit návštěvu jaderného reaktoru Vrabec, urychlovače částic a jiné zajímavé exkurze.

Zároveň vás zveme na Jeden den s fyzikou, který se letos koná v rámci oslav 50-ti let UK MFF. Termín je 7. února, podrobnější informace najdete na www.

Dále si vám dovoluujeme nabídnout ročenky Fyzikálního korespondenčního semináře – ročníky VIII až XVI za bezkonkurenční ceny: VIII. ročník 5 Kč, IX. ročník 10 Kč, X. ročník 15 Kč, XII. ročník 30 Kč, XIII. ročník 40 Kč a XVI. ročník (loňský) 45 Kč. Dále nabízíme publikaci 10 let FYKOSu (jsou zde nejzajímavější příklady z prvních deseti ročníků a úplný seriál na pokračování z X. ročníku o astronomii a astrofyzice) za cenu 60 Kč. Pokud máte o tyto brožury zájem, pošlete nám s další sérií (doporučeně) v obálce příslušný finanční obnos a na zvláštní papír napište, kterou publikaci chcete. Ze Slovenska můžete poslat i slovenské koruny (40 Kč \approx 50 Sk). Ročenky si budete moci zakoupit také osobně na Dni s experimentální fyzikou.

vaši organizátoři

Úloha IV.1 ... flák z šošovky

Mějme čočku o průměru D a ohniskové vzdálenosti f zasazenou ve stěně. Ve vzdálenosti r od stěny a y od optické osy máme bodový zdroj světla, který vyzařuje izotropně. Za čočkou máme ve vzdálenosti l stínítko. A nás by zajímalo, kam dopadne světlo ze zdroje, případně i průběh intenzity na stínítku. (Neuvažujte zobrazovací vady čočky a vlnové vlastnosti světla.)

Úloha IV.2 ... radiátory

V bytě jsou tři radiátory. Voda tekoucí v prvním má teplotu 75°C , voda ve třetím 40°C . Jakou teplotu má prostřední radiátor? Teplota vzduchu v pokoji je 20°C . Všechny radiátory jsou stejné a ztráty v potrubí jsou zanedbatelné.

Úloha IV.3 ... světelný motor

Uvažujte Carnotův cyklus (adiabatický–izotermický–adiabatický–izotermický děj) s tepelným elektromagnetickým zářením. Stavová rovnice pro tepelné záření má tvar $p = \frac{1}{3}u(T)$, kde p je tlak záření a u je jeho hustota energie, která závisí pouze na jeho termodynamické teplotě T . Pro adiabatický děj s tepelným zářením platí $pV^{4/3} = \text{konst.}$ Vypočítejte účinnost tohoto cyklu jako funkci $u(T_1)$ a $u(T_2)$, kde T_1 je teplota ohříváče a T_2 teplota chladiče. Pro libovolný Carnotův cyklus je jeho účinnost dána vztahem $1 - T_2/T_1$. Porovnáním těchto vztahů pro účinnost cyklu odvoďte, že hustota energie záření u je přímo úměrná T^4 .

Úloha IV.4 ... zavlažování

Zahrádkář chce udělat zavlažovací zařízení na svůj záhonek a to následujícím způsobem. Vedle řady rostlinek bude hadice s otvory, kterou položí tak, že u každé rostlinky bude dírka.

Poradte zahrádkáři, jak velké mají být dírky, aby ke každé rostlince teklo stejné množství vody.

Úloha IV.P ... proč máme Měsíc?

Bod, ve kterém má gravitační síla Země a Slunce stejnou velikost, je k Zemi blíže, než obíhá Měsíc. Proč tedy Měsíc neobíhá kolem Slunce?

Úloha IV.Exp ... led

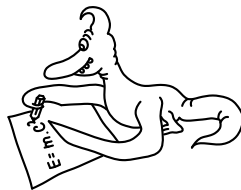
Dáme-li skleničku naplněnou částečně vodou do mrazáku, budeme ji mít za chvíli plnou ledu. Jeho povrch však nebude rovný, ale vypuklý. Zjistěte, proč tomu tak je a vypočtěte alespoň přibližně úhel, který bude svírat povrch ledu s vodorovnou rovinou. Porovnejte tento výsledek s experimentální hodnotou.

Úloha IV.S ... rovnoměrně zrychlený pohyb

Mějme volný hmotný bod, jehož klidová hmotnost je m_0 a který je v naší vztažné soustavě v klidu. V čase $t = 0$ začne na hmotný bod v našem systému působit konstantní urychlující síla o velikosti F .

a) Vypočtěte časovou závislost rychlosti hmotného bodu v naší soustavě. Z této závislosti určete zrychlení hmotného bodu vůči našemu systému. (Řešte pouze pro časy $t > 0$.)

b) V každém okamžiku můžeme s uvažovaným hmotným bodem spojit tzv. klidovou inerciální soustavu. Jak již název napovídá, jedná se o inerciální systém, ve kterém je hmotný bod v daném okamžiku v klidu. S jakým zrychlením se hmotný bod pohybuje ve svých klidových soustavách? Jak velká síla na něj v těchto systémech působí?

**Řešení II. série****Úloha II.1 ... výtah (3 body, řešilo 72 studentů)**

Mějme výtah o hmotnosti m , který je pověšen na laně přes pevnou kladku. Za druhý konec lana tahá silou F člověk, který stojí v onom výtahu. Jeho hmotnost je M . Spočtěte zrychlení výtahu.

Napadlo Karla Koláře

Nejdříve si rozmysleme, jaké síly na výtah a na člověka působí. Směrem dolů působí gravitační síla o velikosti $F_g = (M + m)g$. Nahoru působí síla o velikosti $2F$ (jednak lano táhne kabinu výtahu silou F , jednak působí na člověka reakcí o velikosti F , tyto síly se sčítají). Pokud zvolíme kladný směr nahoru, je celková síla působící na kabinu s člověkem $F_c = 2F - (M + m)g$. Vzhledem k tomu, že platí $F_c = (M + m)a$, máme pro zrychlení výtahu

$$a = \frac{2F}{M + m} - g.$$

Poznámka na závěr: Řešit tuto úlohu pomocí zákona zachování hybnosti není dobrý nápad, ZZH platí pouze v případě, že na soustavu nepůsobí vnější síly, ale zde jsou hned dvě: gravitace a síla od kladky.

Karel Kouřil & Matuš Kurian
karel@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II.2 ... tyč (4 body, řešilo 60 studentů)

Představte si metrovou ideálně homogenní tyč, kterou na krajích ve vodorovné poloze podepřete prsty. Prsty pomalu začnete přibližovat k sobě (směrem ke středu tyče), udržujete je pořád ve stejné výšce. Statický koeficient tření mezi prsty a tyčí je f_s , dynamický f_d , přičemž $f_s > f_d$. Následný děj podrobně popište. Na přednášce viděla Lenka Zdeborová

Jak jste při experimentování zjistili, dochází ke střídání vzájemného pohybu jednoho prstu a tyče, přičemž druhý prst zůstává vůči tyči v klidu. Oba prsty se setkají v těžišti tyče. Zanedbáme-li (při dostatečně malé vzájemné rychlosti prstů a tyče) hybnost tyče, můžeme považovat změny pohybu tyče za okamžité a předpokládat tak platnost podmínek statické rovnováhy.

V počátečním okamžiku je každý z obou prstů na opačném konci tyče, vzájemnému pohybu prstů a tyče brání třecí klidová třecí síla T_k . Vlivem různých faktorů (nesouměrnost prstů, náhoda – neboť oba prsty k sobě nezačneme přibližovat ve stejný časový okamžik), překoná jeden prst sílu klidového tření dříve a tyč se vůči tomuto prstu začne pohybovat. Proti pohybu nyní působí smyková třecí síla T_s , přičemž zřejmě platí $T_s < T_k$, takže druhý prst se zatím vůči tyči nepohybuje, neboť musí překonat větší třecí sílu. S pohybem tyče se mění rozložení tlakových sil, kterými oba prsty působí na tyč. První prst se přibližuje k těžišti, a proto tlaková síla tyče na první prst roste na úkor tlakové síly tyče na druhý prst. Úměrně změnám tlakových sil se také mění třecí síly mezi tyčí a prsty a v určitém okamžiku dosáhne T_s u prvního prstu velikosti T_k u druhého prstu. V tomto okamžiku se začne tyč pohybovat vzhledem ke druhému prstu, a protože třecí síla působící mezi druhým prstem a tyčí bude menší než u prvního prstu (vzdálenost druhého prstu od těžiště tyče bude větší), pohyb tyče se vůči prvnímu prstu zastaví. Popsaný děj se opakuje, pozorujeme střídavý pohyb tyče vůči prvnímu a druhému prstu.

Označme vzdálenosti prstů od těžiště tyče a_1 a a_2 . Prsty působí na tyč tlakovými silami F_1 , F_2 , třecí síly působící na tyč označme T_1 , T_2 . Z podmínek silové a momentové rovnováhy

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 &= mg, \\ F_1 a_1 &= F_2 a_2, \end{aligned}$$

kde mg je velikost tíhové síly tyče, vyplývá

$$F_1 = mg \frac{a_2}{a_1 + a_2}, \quad F_2 = mg \frac{a_1}{a_1 + a_2}.$$

Na počátku je druhý prst ve vzdálenosti $a_2 = l/2$ od těžiště tyče (délku tyče označíme l), vůči které je v klidu, zatímco první prst se pohybuje. V okamžiku obratu a_{11} , kde se první prst zastaví, platí pro velikost třecích sil

$$T_{s1} = T_{k2} \quad \Rightarrow \quad f_d F_1 = f_s F_2,$$

a tedy

$$mg \frac{a_2}{a_1 + a_2} f_d = mg \frac{a_1}{a_1 + a_2} f_s.$$

Z toho vyplývá, že první bod obratu

$$a_{11} = \frac{l}{2} \frac{f_d}{f_s}.$$

Nyní se pohybuje druhý prst, zatímco první je v klidu v bodě $a_1 = a_{11}$. Obdobně jako první bod obratu určíme i druhý bod obratu

$$a_{21} = \frac{l}{2} \left(\frac{f_d}{f_s} \right)^2,$$

a tedy obecně pro n -té body obratu platí

$$a_{1n} = \frac{l}{2} \left(\frac{f_d}{f_s} \right)^{2n-1}, \quad a_{2n} = \frac{l}{2} \left(\frac{f_d}{f_s} \right)^{2n}.$$

Lukáš Schmiedt
krysar@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II.3 ... fotografování (4 body, řešilo 44 studentů)

Při fotografování běžným fotoaparátém nelze dokonale zaostřit na všechny objekty. Ostře se zobrazí pouze body ležící v rovině kolmé na osu objektivu, na kterou je aparát zaostřen. Co se ale stane, když sklopíme ve foťáku film (vůči objektivu)? Kde pak budou body, které se zobrazí ostře? Lze toho nějak prakticky využít?

Cestou vlakem do Brna napadlo Honzu Houška

Pro jednoduchost předpokládejme, že objektiv fotoaparátu je možno považovat za ideální spojnou čočku. Úlohu budeme řešit tak, že za předmět budeme považovat skloněný film (pod úhlem α) a budeme hledat jeho obraz. Toto si můžeme dovolit, protože čočka je jedno, jestli zobrazuje předmět zprava doleva nebo zleva doprava. Také je jí absolutně jedno, kterým směrem světlo letí. Předmět zobrazí na obraz a obraz zpátky na původní předmět.

Udělejme ještě jedno zjednodušení. Předpokládejme, že čočka je symetrická. Pak se můžeme věnovat zobrazování v rovině, pro které máme jednoduché vztahy.

Pro zobrazení obrazu a' platí zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}. \quad (1)$$

Pro příčné zvětšení si můžete v učebnicích optiky najít vzoreček

$$\frac{y'}{y} = -\frac{a' - f}{f}. \quad (2)$$

Čárkované souřadnice přísluší obrazu, nečárkované se týkají zobrazovaného bodu (filmu).

Podívejme se, kam se nám zobrazí bod $[x, y] = [x, (x - a_0) \operatorname{tg} \alpha]$. Bod x se nám podle (1) zobrazí do x' ,

$$x' = \frac{xf}{x - f}. \quad (3)$$

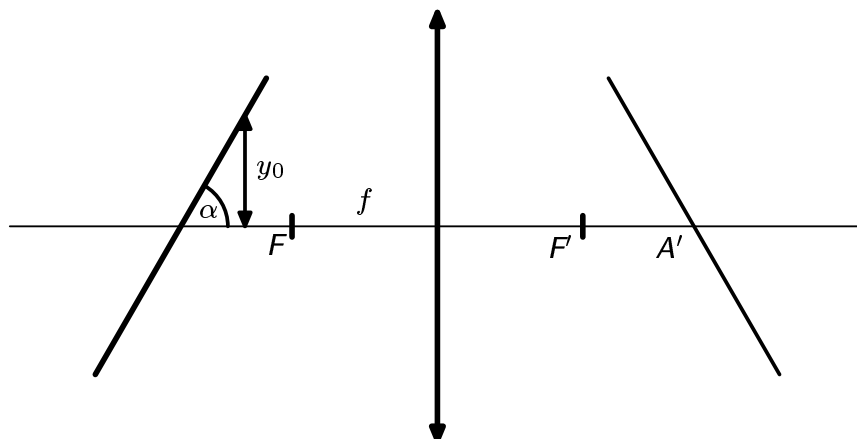
Bod y se nám podle (2) zobrazí do y' ,

$$y' = -f \operatorname{tg} \alpha \frac{x - a_0}{x - f}. \quad (4)$$

Když si vyjádříme z rovnic (3) a (4) x a rovnice porovnáme, dostaneme pro x', y' podmínku

$$y' = \left(\frac{a_0}{f} - 1 \right) \operatorname{tg} \alpha x' - a_0 \operatorname{tg} \alpha. \quad (5)$$

Vzorec (5) je rovnice přímky, řez filmem se nám tedy zobrazil na přímku.



Obr. 1. Zobrazení přímky

Protože objektiv je symetrický, v libovolném řezu se nám podle (5) přímka promítne na přímku. Pootočením objektivu např. o devadesát stupňů se nám promítne řez filmem opět na přímku. Je zcela zřejmé, že všechny obrazové přímky se protnou ve společném bodě (je to bod filmu ležící přesně na optické ose). Výslednou plochu dostaneme tak, že kolem bodu A' budeme rotovat přímku. Plochu, kterou přímka opíše, bude sedlová plocha (se zápornou křivostí), pro rozumné umístění filmu téměř rovina.

Celé naše řešení bylo velice zjednodušeno tím, že jsme objektiv považovali za ideální čočku. Ve skutečnosti je to sice čočka, ale velice komplikovaná a někdy ideální čočce velice nepodobná. Navíc je navrhovaná pro fotoaparáty s kolmým filmem, kde zaručuje dobrou ostrost. Například v okamžiku, kdy skloníme film, se nám může stát, že jeden konec se nám dostane tak blízko čočky, že se z ní stane rozptylka ($a_0 - y_0 \tan \alpha < f$) pro jisté oblasti filmu. Také když postupujeme od osy objektivu, zvětšují se různé zobrazovací chyby, např. čočka nezobrazí bod přesně do bodu, ale do jisté oblasti atp. A i kdyby fotoaparát zobrazoval ostře, obraz, který tímto fotoaparátem dostaneme, bude také mírně deformován dále od středu filmu.

Využití tohoto fotoaparátu nevidím žádné, kromě „uměleckých fotografií“, pořizovaných pro vlastní potěšení. Použití pro letecký průzkum je nevhodné, protože obraz je deformován a není možné z něj přímo, bez počítání, odčítat polohu objektů.

Pavol Habuda
bzucino@yahoo.com

Úloha II.4 ... rezonanční obvod (3 body, řešilo 55 studentů)

Na obrázku č. 2 je znázorněno zařízení, jímž lze měřit malé změny délky. Hlavní částí je vzduchový rovinný kondenzátor. Mění-li se délka vzorku, mění se vzdálenost desek kondenzátoru, a tedy i rezonanční frekvence LC -obvodu, kterou lze snadno měřit.

Uvažme, že před experimentem byla délka vzorku $l_0 = 10,0$ cm, vzdálenost desek kondenzátoru $d_0 = 1,00$ mm a frekvence $f_0 = 50,0$ kHz. Pak byla teplota vzorku zvětšena o $\Delta t = 110^\circ\text{C}$ a frekvence se snížila o $\Delta f = 950$ Hz. Spočtete koeficient teplotní délkové roztažnosti vzorku.

Při prohledávání starých sbírek úloh zaujalo Honzu Houška

Pro rezonanční frekvenci v LC -obvodu platí Thompsonův vztah

$$2\pi f = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Kapacita deskového kondenzátorů je

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d},$$

Kde d je vzdálenost desek kondenzátorů. Rezanční frekvence je tedy úměrná odmocnině z d a proto můžeme psát

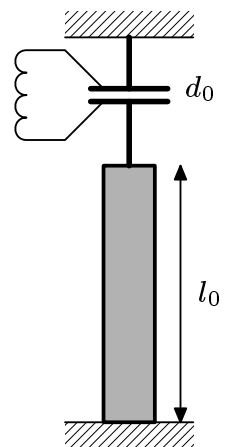
$$\frac{f_1^2}{f_2^2} = \frac{d_1}{d_2}$$

Kde $f_{1,2}$ jsou rezonanční frekvence a $d_{1,2}$ vzdálenosti desek kondenzátorů před a po zahřátí. Změna vzdálenosti desek je tedy

$$d_1 - d_2 = d_1 \left(\frac{1 - (f_1 - \Delta f)^2}{f_1^2} \right).$$

Koeficient délkové roztažnosti je definován jako

$$\alpha = \frac{\Delta l}{l_0} \Delta t,$$



Obr. 2

kde Δl je změna délky vzorků s počáteční délkou l při zahřátí o teplotu Δt . Změna délky vzorků je stejná jako změna vzdálenosti desek kondenzátorů, a tedy

$$\alpha = \frac{d_1}{l_0 \Delta t} \left(1 - \left(\frac{f_1 - \Delta f}{f_1} \right)^2 \right).$$

Po dosazení zadaných hodnot vychází $\alpha = 3,4 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

Pavel Augustinský
pavel@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II.P ... chladič (5 bodů, řešilo 51 studentů)

Představte si chladič, který jistě používáte v chemických laboratořích. Jsou to dvě sousední trubky, mezi nimi teče chladicí kapalina, ve vnitřní trubce teče kapalina chlazená. Naší otázkou je, zda je chlazení kapaliny účinnější, tečou-li kapaliny proti sobě či souběžně. Nezapomeňte popsat za jakých zjednodušujících předpokladů úlohu řešíte.

Jako úlohu na jednoduché zamýšlení navrhl Lukáš Schmiedt

Tuto úlohu je možno řešit kvalitativně či kvantitativně nebo se ji pokusit modelovat na počítači. Nejprve uveďme kvalitativní řešení. V celém řešení budeme uvažovat jen přenos tepla přes stěnu mezi kapalinami, předpokládat nezávislost rychlosti a teploty dané kapaliny na vzdálenosti od osy chladiče a veškeré další jevy zanedbáme (vedení tepla kapalinou ve směru osy apod.)

Lze vyjít například z toho, že účinnost chlazení závisí na rozdílu teplot látek. Ta je na začátku „souběžného“ chladiče vysoká, pak ale rychle klesá a pro dostatečně dlouhý chladič (vzhledem k jeho konstrukci a vlastnostem látek, např. průtokům kapalin a jejich tepelným kapacitám) se blíží nule (teploty kapalin se vyrovnávají). Pro teplotu chlazené kapaliny na výstupu bude platit $T_2^{(0)} > T > T_1^{(0)}$, kde $T_{1,2}^{(0)}$ jsou vstupní teploty chladicí, resp. chlazené vody. Pro „protiběžný“ chladič se bude účinnost udržovat na stále stejné úrovni a za stejných předpokladů jako výše dostaneme $T \rightarrow T_1^{(0)}$.

Na situaci se také můžeme podívat z pohledu chladicí kapaliny. U „souběžného“ chladiče je hned na vstupu ohřáta a pak kolem ní protéká již částečně tepla zbavená chlazená kapalina a jejich teploty se pomalu vyrovnávají. Pro „protiběžný“ chladič se při svém vstupu chladicí kapalina setkává s tekutinou téměř stejné teploty od které se zanedbatelně ohřeje (a kterou trochu ochladí) a při svém dalším průtoku chladičem se setkává s kapalinou, od které odebírá (přibližně) stále stejné množství tepla (na jednotku délky či času).

Je tedy zřejmé, že za výše uvedených podmínek (dostatečně dlouhý chladič) je výhodnější použít „protiběžný“ chladič. Pokusme se nyní o kvantitativní řešení.

Uvažujme (prozatím souběžný) pohyb tekutin na malém úseku trubice. V této oblasti dojde přes stěnu trubice k předání energie z teplejší kapaliny do chladnější o velikosti $\Delta Q = k[T_2(x) - T_1(x)]$, kde k je koeficient obsahující velikost a termické vlastnosti trubice (např. pro válcový tvar roste lineárně s r). Díky tomuto transportu energie v příslušné části chlazené kapaliny poklesne celková energie (tj. $\Delta Q = -\nu_2 c_2 T_2'(x)$) a energie chladicí kapaliny vzroste (tj. $\Delta Q = \nu_1 c_1 T_1'(x)$), přičemž $\nu_{1,2}$ jsou hmotnostní toky kapalin a $c_{1,2}$ jejich měrné tepelné kapacity. Získáme tedy soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} k [T_2(x) - T_1(x)] &= -\nu_2 c_2 \frac{dT_2(x)}{dx}, \\ k [T_2(x) - T_1(x)] &= \nu_1 c_1 \frac{dT_1(x)}{dx}. \end{aligned}$$

Tuto soustavu nejsnáze vyřešíme tak, že z rovnice první vyjádříme T_1 (zde a dále již nebudeme pro přehlednost vypisovat závislost na x) a dosadíme do rovnice druhé, čímž obdržíme jednu rovnici druhého stupně tvaru $T_2''(x) + aT_2'(x) = 0$, která má obecné řešení (pro $a \neq 0$, $a = 0$ není fyzikálně výhodné – odpovídá špatným chladicím schopnostem „protiběžného“ chladiče)

$$\begin{aligned} T_2(x) &= C_1 + C_2 e^{-ax}, \\ a &= \frac{k(\nu_1 c_1 + \nu_2 c_2)}{\nu_1 \nu_2 c_1 c_2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Dosazením do vyjádřeného T_1 pomocí T_2 a jeho derivací máme

$$\begin{aligned} T_1(x) &= C_1 + C_2 b e^{-ax}, \\ b &= -\frac{\nu_2 c_2}{\nu_1 c_1}. \end{aligned} \quad (7)$$

$C_{1,2}$ získáme z počátečních podmínek $T_1(0) = T_1^{(0)}$ a $T_2(0) = T_2^{(0)}$ – dosadíme do rovnic $x = 0$ a vyjádříme $C_{1,2}$ (soustava dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé). Takto získáme výrazy pro průběh teploty kapalin podél délky chladiče, nás konkrétně zajímá $T_2(L) - T_2^{(0)}$, což je rozdíl teplot vytékající a vtékající chlazené kapaliny u „souběžného“ chladiče. Po algebraických úpravách získáme

$$T_2(L) - T_2^{(0)} = \left(T_2^{(0)} - T_1^{(0)} \right) \frac{-1 + e^{-aL}}{1 - b}. \quad (8)$$

Pokud chladící kapalinu necháme vtékat do chladiče z opačné strany („protiběžný“ chladič), tak v našem výpočtu budou dvě změny – opačné znaménko u ν_1 a počáteční podmínka pro chladící kapalinu $T_1(L) = T_1^{(0)}$. Faktory a a b budou mít tedy tvar (změna dána $\nu_1 \rightarrow -\nu_1$)

$$\begin{aligned} a^* &= -\frac{k(\nu_2 c_2 - \nu_1 c_1)}{\nu_1 \nu_2 c_1 c_2}, \\ b^* &= \frac{\nu_2 c_2}{\nu_1 c_1} \end{aligned}$$

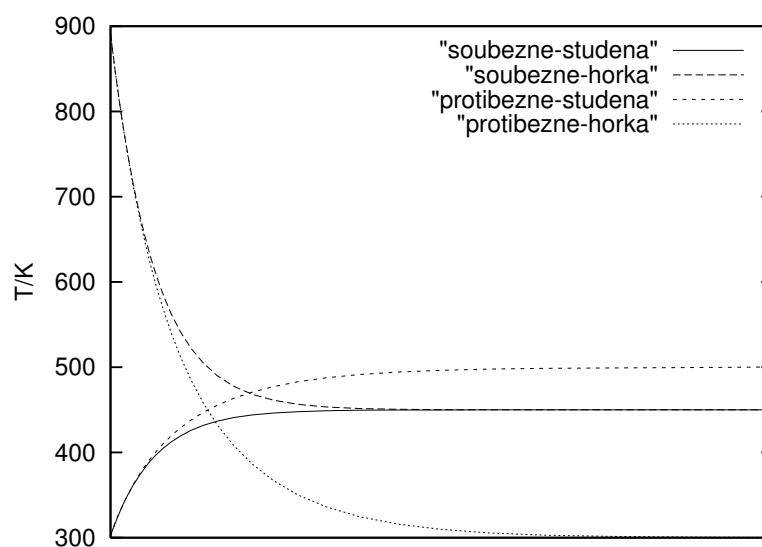
a rovnice (6) a (7) spolu s odlišnou počáteční podmínkou po úpravách dají analogii (8)

$$T_2(L) - T_2^{(0)} = \left(T_2^{(0)} - T_1^{(0)} \right) \frac{-1 + e^{-a^*L}}{1 - b^* e^{-a^*L}}. \quad (9)$$

Podělením rovnice (9) rovnicí (8) zjistíme, který způsob chlazení je účinnější – pokud bude výsledek větší jak jedna, pak je vhodnější použít „protiběžný“ chladič a naopak; bude-li se výsledek lišit v závislosti na L , pak pro některé délky chladiče bude výhodnější jeden a pro jiné druhý způsob proudění. Dostaneme výraz (využili jsme $b^* = -b$)

$$\frac{-1 + e^{-a^*L}}{1 - b^* e^{-a^*L}} \left(\frac{-1 + e^{-aL}}{1 - b} \right)^{-1} = \frac{-1 + e^{-a^*L}}{-1 + e^{-aL}} \frac{1 - b}{1 + b e^{-a^*L}},$$

jehož analýzou zjistíme, že je pro všechna L větší než 1 ($a^* < a$), a tedy první zlomek je větší než 1, v druhém zlomku si uvědomíme, že $b < 0$ a tedy čitatel je větší než 1 a jmenovatel menší (nepatrně, v limitě skutečného chladiče $\nu_2 c_2 \ll \nu_1 c_1 \Rightarrow b \rightarrow 0$ – chladící kapalinou je rychle proudící voda s vysokou měrnou tep. kapacitou) a tedy i druhý zlomek a tedy i celý výraz je větší než 1.



Obr. 3. Závislost konečných teplot na délce trubice

Numerickou modelaci vidíte (konkrétně závislost teplot vytékajících kapalin na délce chladiče, což není totéž jako závislost teploty v chladiči při jeho konstantní délce) na obrázku č. 3, sbíhající křivky patří „souběžnému“ chladiči, křížící se „protiběžnému“. Pro modelaci bylo použito $\nu_1 = 3\nu_2$, jinak stejné vlastnosti.

Jan Prokleška

nikola@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II. Exp ... elektrostatické pole Země (8 bodů, řešilo 9 studentů)

Změřte velikost elektrostatického pole Země.

Návod: Můžete buď přímo měřit potenciálový rozdíl mezi Zemí a izolovaným vodičem v určité výšce (pozor však, musíte zařídit, aby se potenciál tohoto vodiče stihl vyrovnat s potenciálem vzduchu v příslušné výšce — zkuste např. do vzduchu umístit nádobu s vodou tak, aby voda mohla odkapávat a odnášet tak sebou přebytečný náboj). Druhý způsob využívá faktu, že Země má svůj povrchový náboj. Umístíme-li do blízkosti povrchu vodivou desku a uzemníme ji, objeví se na ní náboj. Přikryjeme-li tuto desku jinou uzemněnou deskou, objeví se náboj na ní a z původní vymizí, což můžeme galvanometrem změřit.

Při čtení Feynmanových přednášek z fyziky napadlo Lenku Zdeborovou

Teorie

Jak změřit elektrostatické pole Země, když se jeho hodnota mění v blízkosti vodivých předmětů (tedy i nás lidí, domů, stromů atd.)? V zadání jsme vám stejně jako Richard P. Feynman ve svých Přednáškách navrhli dva způsoby.

První z nich byl založený přímočaře na změření potenciálu mezi dvěma místy v různých výškách. To je ovšem natolik technicky náročné, že se ani nikomu z řešitelů ani nám nepodařilo touto metodou nic naměřit. Uvědomme si, že předmět zavěšovaný do výšky h musí být dost veliký, aby se na něm indukoval náboj dostatečný na to, aby se nevybil při prvním dotyku svorek voltmetru. Pak také musí být daleko od vysokých vodivých objektů jako jsou stromy a domy (nemůžeme zavěšovat z okna nebo z větve stromu), neboť v blízkosti takových objektů se elektrostatické pole deformuje a pod větví stromu či pod oknem je typicky mnohem menší než na volném prostranství. Dalším problémem je, za co předmět zavěsit, aby byl dokonale izolován. Provaz či dřevo zvlhnou od vzduchu. Ideální by bylo někde na poli postavit konstrukci ze skla či porcelánu a tam provést měření. Nebo vyrobit balón, který vyletí do určité výšky, tam nějakou dobu zůstane, a pak zase sletí dolů. Na to jsme však neměli prostředky.

Druhý způsob byl na realizaci mnohem přijatelnější. Pokud existuje elektrické pole Země, musí být na povrchu Země náboj. Citujme z Feynmana: „Umístíme-li do blízkosti zemského povrchu rovnou kovovou desku a uzemníme ji, objeví se na ní záporné náboje. Přikryjeme-li tuto desku jinou uzemněnou vodivou deskou, objeví se náboje na ní a z původní desky vymizí. Když odměříme náboj, jenž prochází z první desky k zemi při jejím zakrývání, můžeme zjistit povrchovou hustotu náboje, která na něm byla, a tím i elektrické pole.“ Zde zůstává problémem, jak změřit onen prošlý náboj. Vhodný galvanometr nemáme. Procházející proud je mnohem menší než je citlivost běžného ampérmetru. Zbývá měřit napětí $u(t)$ na odporu voltmetru R , pak pro prošlý náboj platí

$$Q = \int_0^t i(t) dt = \int_0^t \frac{u(t)}{R} dt.$$

Čas po který se na milivoltmetru nějaká výchylka drží je velmi krátký, proto nejsme schopni měřit závislost $u(t)$. Integrál a tedy i hodnotu náboje budeme tedy aproximovat vztahem

$$Q = \frac{\Delta U \Delta t}{R},$$

kde ΔU je střední výchylka voltmetru, která se na přístroji drží dobu Δt . Uvědomme si, že touto aproximací vnášíme do měření obrovskou chybu (možná i více než 100 %), lépe to ovšem v našich podmínkách neumíme.

Elektrické pole nad povrchem koule o plošné hustotě náboje σ je $E = \sigma/\epsilon_0$, kde ϵ_0 je permitivita vakua (vzduchu). Je-li tedy plocha měřené desky S , dostáváme pro intenzitu elektrického pole nad povrchem Země

$$E = \frac{\Delta U \Delta t}{\epsilon_0 S R}. \quad (10)$$

Postup měření a výsledky

K měření jsme použili dva plechové pláty o rozměrech 30×70 cm, uprostřed zahrady jsme do země zarazili zemnicí drát, k němu uzemnili první plech přes digitální multimetr a druhou přímo. Na zem jsme položili skleněnou desku (šířky asi 3 mm), aby náboj z prvního plechu nemohl utíkat jinudy než přes voltmetr. Na sklo jsme položili první plechový plát, na něj druhou skleněnou desku (opět kvůli izolaci). Soustavu jsme přikrývali a odkrývali druhým plechem a přitom pozorovali následující: Při nasouvání plechu se údaj na voltmetru (skoro nula) zvětšil o 1–2 mV, zůstal na voltmetru dobu srovnatelnou s délkou nasouvání plechu, tj. asi 1 s. Při odsouvání plechu jsme pozorovali totéž, jen údaj na displeji se o danou hodnotu zmenšil. Na spodním plechu byla připojena záporná svorka voltmetru, při nasouvání tedy z desky odcházely záporné náboje, to odpovídá teorii. Dosadíme do vztahu (10) hodnoty $\Delta U = 1,5$ mV, $\Delta t = 1$ s, $R = 10$ M Ω podle manuálu k multimetru, $S = 0,21$ m². Dostaneme hodnotu elektrického pole Země $E = 80$ V \cdot m⁻¹.

Závěr

Naměřenou hodnotu intenzity pole považujeme vzhledem k výše uvedené aproximaci integrálu za velmi přibližnou, chybu odhadneme asi na 100 %. Ostatní chyby jsou vůči této zanedbatelné. V literatuře se uvádí, že za klidného počasí je intenzita elektrického pole nad povrchem Země kolem 120 V \cdot m⁻¹, což se s naším výsledkem v rámci možné chyby našeho měření velmi dobře shoduje.

Lenka Zdeborová
lenka@fykos.mff.cuni.cz

Úloha S . II ... paradoxy (7 bodů, řešilo 37 studentů)

a) Působením rychlých částic kosmického záření vznikají vysoko v atmosféře částice zvané mezony μ . Tyto částice žijí po dobu $\tau = 2 \cdot 10^{-6}$ s a pak se rozpadají na jiné částice. Typická rychlost vzniklých mezonů μ je $v = 0,998c$. Mezony μ tudíž urazí vzdálenost $v\tau = 600$ m. Jak je tedy možné, že jsou detekovány na zemském povrchu, když vznikají ve výškách větších než 6 km? Tento paradox vysvětlíte jak z hlediska soustavy spojené se zemským povrchem tak z hlediska soustavy spojené s mezonem μ .

b) Mějme raketu, která odstartuje ze Země k jedné vzdálené hvězdě. Po dosažení hvězdy se opět vrátí zpět na Zemi. Na své cestě se raketa pohybuje konstantní rychlostí v blízkou rychlosti světla. Užitím dilatace času dostaneme, že z hlediska pozorovatele na Zemi půjdou pomaleji hodiny na raketě. Podle pozorovatele na raketě však půjdou pomaleji hodiny na Zemi. Tento paradox se nazývá paradoxem dvojčat (hodiny na raketě a na Zemi lze nahradit dvojčaty). Užitím Lorentzovy transformace ukažte, že ve skutečnosti oba pozorovatelé dojdou ke stejnému závěru. Určete, ve kterém případě je dilatace času užita chybně, a vysvětlíte proč.

c) V mnohých knihách naleznete následující vysvětlení paradoxu dvojčat: Raketa není inerciální soustavou, neboť se alespoň v některých fázích letu musí pohybovat se zrychlením, a proto nelze užít STR. Přeformulujte tedy paradox dvojčat tak, aby se vše odehrávalo v inerciálních systémech. (Nápověda: K přenosu informace lze užít například elektromagnetický signál).

a) Pro rychlost $0,998c$ je hodnota faktoru γ rovna přibližně 16. Uvedená hodnota doby života τ mezonu μ odpovídá případu, kdy je tato částice vůči pozorovateli v klidu. Z hlediska pozorovatele na Zemi bude tedy doba života mezonu μ vlivem dilatace času šestnáctkrát delší. Mezon μ v této soustavě tudíž urazí šestnáctkrát větší vzdálenost. To znamená, že může dorazit až k zemskému povrchu.

Ke stejnému výsledku dojdeme i v soustavě spojené s mezonem μ . Vlivem kontrakce délek jsou totiž pro mezon μ všechny „pozemské vzdálenosti“ šestnáctkrát kratší. Na počátku je tak zemský povrch ve vzdálenosti pouhých 375 m od mezonu μ a přibližuje se k němu téměř rychlostí světla. Zemský povrch tedy „dopadne“ na mezon μ dříve, než se mezon stačí rozpadnout.

b) Vzdálenost Země a hvězdy v soustavě spojené se Zemí označme l_0 . Celková doba letu je v obou vztažných soustavách rovna dvojnásobku doby letu ze Země ke hvězdě. Stačí se tedy omezit na první polovinu letu. Počátek prostorových souřadnic zvolme na Zemi. Čas $t = 0$ nechť odpovídá okamžiku startu rakety ke hvězdě. Souřadnice v soustavě spojené s raketou volme tak, aby bylo možné užít speciální Lorentzovu transformaci (transformace odvozená v druhé kapitole).

Nejprve řešíme problém z hlediska pozorovatele na Zemi. Start rakety má v této soustavě souřadnice $x = 0$, $t = 0$. Raketa dorazí ke hvězdě za čas $t_z = l_0/v$. Přílet rakety ke hvězdě tedy odpovídá souřadnicím $x = l_0$, $t = t_z$. Pomocí Lorentzovy transformace získáme souřadnice těchto událostí v soustavě spojené s raketou. Pro start rakety tak dostáváme $x' = 0$, $t' = 0$ a pro přílet rakety obdržíme souřadnice

$$x' = \gamma \left(l_0 - v \frac{l_0}{v} \right) = 0, \quad t' = \gamma \left(\frac{l_0}{v} - \frac{v l_0}{c^2} \right) = \frac{l_0}{\gamma v}.$$

Pro pozorovatele na raketě bude tedy doba letu t_r rovna

$$t_r = \frac{t_z}{\gamma} = \frac{l_0}{\gamma v}.$$

Za náš vztažný systém nyní zvolme raketu. Start rakety má opět souřadnice $x = 0$, $t = 0$. Vzhledem ke kontrakci délek je vzdálenost hvězdy a Země v naší soustavě rovna $l = l_0/\gamma$. Hvězda i Země se vůči nám pohybují rychlostí $-v$. Hvězda k nám tedy doletí v čase $t = l/v = l_0/\gamma v$. Doba letu rakety t_r v našem systému je tedy rovna hodnotě $l_0/\gamma v$. Souřadnice příletu hvězdy v naší soustavě jsou $x = l_0$, $t = t_r$. Lorentzovou transformací obdržíme odpovídající souřadnice v soustavě spojené se Zemí. Startu ze Země opět odpovídají souřadnice $x' = 0$, $t' = 0$. Souřadnice příletu hvězdy jsou dány vztahy:

$$x' = \gamma v \frac{l_0}{\gamma v} = l_0, \quad t' = \gamma \frac{l_0}{\gamma v} = \frac{l_0}{v}.$$

Pro pozorovatele na Zemi tudíž trvá let rakety po dobu t_z :

$$t_z = \gamma t_r = \frac{l_0}{v}.$$

Vidíme tedy, že k žádnému paradoxu ve skutečnosti nedochází. Diletace času je chybně použita pozorovatelem na raketě. Diletaci času lze totiž užít pouze v případě, kdy jsou události v pohybující se soustavě souměrné (přesněji nastávají v rovině kolmé na rychlost), jak plyne z jejího odvození.

c) Mějme dvě rakety pohybující se proti sobě po spojnicí Země a hvězdy. Obě rakety se pohybují rovnoměrně přímočaře rychlostí v vůči Zemi. Na obě rakety a na Zemi umístíme identické hodiny. Počáteční podmínky pohybu obou raket zvolme tak, aby se obě potkaly u hvězdy. V okamžiku, kdy první raketa mine Zemi, nastavíme na hodinách umístěných na první raketě a na Zemi čas nula. Při setkání obou raket u hvězdy nastavíme na hodinách druhé rakety čas z hodin umístěných na první raketě. Informaci o časovém údaji přeneseme z první rakety na druhou pomocí elektromagnetického signálu. V okamžiku průletu druhé rakety kolem Země pak přeneseme elektromagnetickým signálem informaci o čase, který uplynul na obou raketách během letu mezi Zemí a hvězdou, a porovnáme jej s časem uplynulým na Zemi. Výsledek tohoto porovnání pak nesmí záviset na volbě vztažné soustavy.

Nyní se veškeré „stárnutí dvojčat“ odehrává pouze v inerciálních systémech. Paradox tedy musí být řešitelný v rámci STR, neboť v opačném případě by STR nebyla vnitřně konzistentní teorií.

Paradox dvojčat lze rovněž objasnit znázorněním celé situace v časoprostoru (viz obrázek). V našem případě vystačíme s dvourozměrným časoprostorem, neboť vše podstatné se odehrává pouze v jednom prostorovém směru. Nečárkované souřadnice odpovídají pozorovateli spojenému se Zemí. Inerciální soustavy spojené s pozorovatelem na raketě mají čárkované souřadnice. Cestě ke hvězdě odpovídají jednou čárkované souřadnice. Dvakrát čárkovanými souřadnicemi je popsán inerciální systém spojený s raketou při zpátečním letu.

Souřadnice v námi uvažovaných systémech jsou zvoleny tak, že světočára (dráha v časoprostoru – celá historie daného objektu) hvězdy splývá s osou ct a světočára pozorovatele na raketě je složena z částí splývajících se světočárou Země označenou Z a s osami ct' a ct'' . Do obrázku jsou také zakresleny světočáry označené písmenem S odpovídající světelným signálům, které přicházejí a opouštějí událost O , což je přílet rakety ke hvězdě. Souřadnice všech inerciálních pozorovatelů jsou vůči světočárám S symetrické. To je dáno principem konstantní rychlosti světla. Start rakety ze Země je označen písmenem A . Událost B odpovídá návratu rakety zpět na Zemi.

Z obrázku vidíme, že v soustavě S je s událostí O současná událost E , zatímco v soustavě S' jsou současné události O a C . Platí tedy $\Delta t'_{OA} = \Delta t'_{CA}$. K získání vztahu mezi $\Delta t'_{CA}$ a Δt_{CA} můžeme použít dilataci času, neboť události C a A jsou v soustavě spojené se Zemí souměrné. Dostáváme tak vztah

$$\Delta t_{CA} = \frac{\Delta t'_{OA}}{\gamma}.$$

Doba odpovídající polovině letu rakety na Zemi je však dána časovým intervalem mezi událostmi A a E . Dilataci času tedy chybně užívá pozorovatel na raketě. Chybějící časový interval mezi událostmi C a E určíme pomocí Lorentzovy transformace. Vzdálenost hvězdy a Země je v soustavě S' dána vztahem $l = v\Delta t'_{OA}$. Dostáváme tedy vztah

$$\Delta t_{EC} = \Delta t_{OC} = \gamma \left(\Delta t'_{OC} + \frac{vl}{c^2} \right) = \gamma \frac{v^2}{c^2} \Delta t'_{OA}.$$

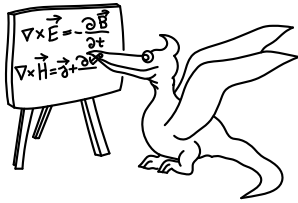
Polovina doby letu rakety na Zemi tudíž trvá

$$\Delta t_{EA} = \left(\gamma \frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma} \right) \Delta t'_{OA} = \gamma \left(\frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right) \Delta t'_{OA} = \gamma \Delta t'_{OA}.$$

Tento vztah je identický se vztahem, který obdrží pozorovatel na Zemi užitím dilatace času, neboť události E a O jsou v soustavě spojené se Zemí současné a události A a O jsou pro pozorovatele na raketě souměrné.

Události, které se nacházejí mezi událostmi C a D na světočáře Z , se v soustavě spojené s raketou odehrají v jeden okamžik současně s událostí O . Tento „nesmysl“ je způsoben nespojitou změnou rychlosti rakety u hvězdy. Pokud budeme uvažovat rychlou ale spojitou změnu rychlosti rakety, potom se v okolí události O začne rychle natáčet osa x (současnost) pozorovatele na raketě z původní polohy x' do nové polohy x'' . Události mezi C a D pro pozorovatele na raketě sice opět proběhnou velmi rychle, ale v tomto případě již různým událostem mezi C a D odpovídají i různé, s nimi současné, události na raketě.

Pokud by na palubě rakety byla lidská posádka, potom by předchozí manévry u hvězdy zřejmě nepřežila z důvodu příliš velkého přetížení. Raketa s lidskou posádkou se tak musí pohybovat se zrychlením po nezanedbatelnou část doby letu. Čas odpovídající letu rakety, který naměří její posádka, lze v tomto případě určit sečtením (integrací) jednotlivých časových intervalů, které posádka stráví ve svých klidových inerciálních soustavách. Ve všech případech vychází, že se posádka rakety vrátí zpět na Zemi mladší, než budou její vrstevníci, kteří zůstanou na Zemi. K tomuto problému se ještě vrátíme v poslední kapitole seriálu, která bude věnována obecné teorii relativity.



Seriál na pokračování

Kapitola 4: Relativistická dynamika

Závislost hmotnosti těles na jejich rychlosti

V této podkapitole se budeme zabývat otázkou, jakou hmotnost naměří pozorovatel u tělesa, které se vůči němu pohybuje. Vliv pohybu těles na jejich setrvačnou hmotnost vyšetříme na případu srážky dvou identických částic. Při řešení tohoto problému budeme předpokládat, že se ve všech vztažných soustavách zachovává celková hmotnost a celková hybnost tohoto systému. O hybnosti částice předpokládáme, že je stejně jako v klasické fyzice dána součinem její hmotnosti a její rychlosti.

Mějme tedy dvě identické částice, které se pohybují k sobě. Uvažujme nyní vztažnou soustavu, ve které se obě částice pohybují stejně rychle. Velikost rychlosti částic v tomto systému označme v_0 . Při srážce se obě částice zastaví a poté odlétnou stejnou rychlostí v_0 v opačných směrech, než přilétly. Srážku těchto částic nyní popíšeme z hlediska pozorovatele, který se vůči našemu vztažnému systému pohybuje rychlostí v ve směru pohybu částic. Rychlost v nechť je kladná, pokud se pozorovatel v naší soustavě pohybuje stejným směrem jako první částice. Užitím vztahů pro skládání rychlostí dostaneme, že rychlost v_1 první částice v soustavě pozorovatele je dána vztahem

$$v_1 = \frac{v_0 - v}{1 - v_0 v / c^2}.$$

Rychlost v_2 druhé částice vůči pozorovateli získáme ze vztahu pro v_1 záměnou v_0 za $-v_0$:

$$v_2 = -\frac{v_0 + v}{1 + v_0 v / c^2}.$$

V soustavě spojené s pozorovatelem nyní na srážku částic aplikujme zákony zachování hmotnosti a hybnosti. Podle zákona zachování hmotnosti platí pro hmotnost M objektu vzniklého v okamžiku srážky částic vztah $M = m_1 + m_2$, kde m_1 a m_2 jsou hmotnosti první a druhé částice vzhledem k pozorovateli. Rychlost tohoto objektu v soustavě pozorovatele je rovna $-v$, neboť v naší soustavě je v klidu. Užitím zákona zachování hybnosti tedy dostáváme rovnici

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = -M v = -m_1 v - m_2 v.$$

Jednoduchou úpravou získáme vztah $m_1 (v_1 + v) = -m_2 (v_2 + v)$. Užitím vztahů pro rychlosti částic vůči pozorovateli dostáváme

$$v_{1,2} + v = \frac{\pm v_0 - v}{1 \mp v_0 v / c^2} + v = \frac{\pm v_0 - v + v \mp v_0 v^2 / c^2}{1 \mp v_0 v / c^2} = \pm v_0 \frac{1 - v^2 / c^2}{1 \mp v_0 v / c^2}.$$

Dosažením těchto vztahů do poslední rovnice získáme následující rovnost:

$$m_1 \left(1 + \frac{v_0 v}{c^2}\right) = m_2 \left(1 - \frac{v_0 v}{c^2}\right).$$

Určeme nyní hodnoty faktorů γ , které odpovídají rychlostem částic v systému pozorovatele:

$$\gamma_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{1,2}^2}{c^2}}} = \frac{1 \mp \frac{v_0 v}{c^2}}{\sqrt{1 \mp 2 \frac{v_0 v}{c^2} + \frac{v_0^2 v^2}{c^4} - \frac{v_0^2}{c^2} \pm 2 \frac{v_0 v}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(v) \gamma(v_0) \left(1 \mp \frac{v_0 v}{c^2}\right).$$

Užitím těchto vztahů tak dostáváme následující rovnici

$$m_1 \gamma_2 = m_2 \gamma_1.$$

Zvolme nyní pozorovatele, vůči kterému je druhá částice v klidu. Hmotnost druhé částice v tomto případě označme m_0 . Tato hmotnost se nazývá klidová, neboť se jedná o hmotnost částice, kterou naměří pozorovatel, vůči kterému se částice nepohybuje. Vzhledem k identičnosti částic je klidová hmotnost první částice rovněž rovna hodnotě m_0 . Užitím poslední rovnice tak pro setrvačnou hmotnost m pohybující se částice dostáváme vztah

$$m = \gamma m_0,$$

kde m_0 je její klidová hmotnost a hodnota γ odpovídá rychlosti částice vůči pozorovateli. Vidíme tedy, že hmotnost těles je závislá na pohybu vůči pozorovateli! Tento, z klasického hlediska, pozoruhodný jev byl potvrzen mnoha experimenty na mikročásticích.

Při odvození závislosti hmotnosti částice na její rychlosti jsme vycházeli ze zákona zachování hmotnosti. Vzhledem k obdržným výsledkům se nám nyní nabízí otázka, zda se zachovává také klidová hmotnost. Na našem příkladu srážky dvou částic se snadno přesvědčíme, že tomu tak není. V naší soustavě se obě částice pohybovaly stejnou rychlostí v_0 . Měly tedy i stejnou hmotnost m , která je větší než jejich klidová hmotnost m_0 . Podle zákona zachování hmotnosti je v naší soustavě hmotnost objektu vzniklého v okamžiku srážky rovna hodnotě $2m$. Tato hmotnost je klidová, neboť se tento objekt vůči nám nepohybuje. Pokud by platil zákon zachování klidové hmotnosti, potom by hmotnost tohoto objektu byla rovna hodnotě $2m_0$. To je však méně než skutečná hodnota $2m$. Klidová hmotnost se tedy nezachovává.

Relativistická pohybová rovnice

Pohybová rovnice hmotného bodu v inerciální vztažné soustavě (druhý Newtonův pohybový zákon) má v STR následující tvar:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

kde \mathbf{F} je síla působící na hmotný bod a $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ je hybnost hmotného bodu, která je rovna, jak již bylo řečeno, součinu jeho hmoty a rychlosti. Pokud zapíšeme klasickou pohybovou rovnici pomocí hybnosti, potom má stejný tvar jako relativistická. Rozdíl spočívá v tom, že v klasické fyzice je hmotnost hmotného bodu konstantní, zatímco v relativitě, jak jsme zjistili, závisí na rychlosti pohybu bodu vůči pozorovateli.

Dosadíme-li definiční vztah pro hybnost \mathbf{p} do pohybové rovnice hmotného bodu, potom dostaneme pohybovou rovnici ve tvaru:

$$\mathbf{F} = \frac{dm}{dt} \mathbf{v} + m\mathbf{a},$$

kde $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ je zrychlení hmotného bodu. Tato rovnice se od klasického Newtonova zákona liší přítomností členu $(dm/dt)\mathbf{v}$. Jeho původ spočívá v závislosti hmotnosti těles na jejich rychlosti (a tedy i na čase). Tuto pohybovou rovnici se nyní pokusíme přepsat na rovnice podobné druhému Newtonovu pohybovému zákonu.

Rychlost \mathbf{v} hmotného bodu můžeme vždy zapsat ve tvaru $\mathbf{v} = v\mathbf{v}_0$, kde \mathbf{v}_0 je jednotkový vektor mající stejný směr jako vektor rychlosti \mathbf{v} . Hodnota v je pak rovna velikosti rychlosti \mathbf{v} . Pro zrychlení \mathbf{a} potom platí vztah

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \mathbf{v}_0 + v \frac{d\mathbf{v}_0}{dt}.$$

První člen má směr rychlosti \mathbf{v} . Druhý člen ve výrazu pro zrychlení je na rychlost kolmý, neboť změna jednotkového vektoru je na příslušný jednotkový vektor kolmá. Rozložme tedy zrychlení \mathbf{a} na dva navzájem kolmé vektory \mathbf{a}_{\parallel} a \mathbf{a}_{\perp} . První vektor nechť má směr rychlosti \mathbf{v} . Vektor \mathbf{a}_{\parallel} tudíž popisuje

tečné zrychlení a vektor \mathbf{a}_\perp zrychlení normálové. Obdobně rozložíme i působící sílu \mathbf{F} na odpovídající složky \mathbf{F}_\parallel a \mathbf{F}_\perp . Pohybovou rovnici lze tedy přepsat na následující dvě rovnice:

$$\mathbf{F}_\perp = m\mathbf{a}_\perp, \quad \mathbf{F}_\parallel = \left(v \frac{dm}{dv} + m \right) \mathbf{a}_\parallel,$$

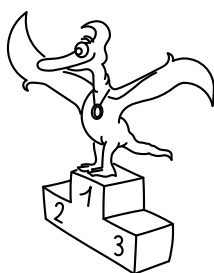
kde jsme využili vztahu $\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dv} \frac{dv}{dt}$. Obě rovnice již mají tvar druhého Newtonova pohybového zákona. Druhou rovnici lze ještě dále upravit. Užitím vztahu pro relativistickou hmotnost snadno vypočteme derivaci, která se zde vyskytuje:

$$\frac{dm}{dv} = m\gamma^2 \frac{v}{c^2}.$$

Po úpravě tak dostáváme následující tvar druhé pohybové rovnice:

$$\mathbf{F}_\parallel = m\gamma^2 \left(\frac{v^2}{c^2} + 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \mathbf{a}_\parallel = m\gamma^2 \mathbf{a}_\parallel.$$

Z právě odvozených vztahů vidíme, že těleso vždy klade větší odpor vůči urychlení ve směru pohybu než ve směru kolmém na svou rychlost.



Pořadí řešitelů po II. sérii



Kategorie čtvrtých ročníků

	Jméno	Škola	1	2	3	4	5	6	S2	II	%	Σ
	Studentka Pilná	UK MFF	3	4	4	3	5	8	6	33	100	66
1.	Pavel Kvasnička	G Chrudim	3	4	4	3	4	–	6	24	81	47
2.	Eva Skopalová	G Poprad	1	3	4	3	2	–	2	15	72	42
3.	Miroslav Šulc	G Ústí n. L. – Stavbařů	3	2	–	3	–	–	2	10	61	30
4.–5.	Ľuboš Bednárik	G Trenčín	1	4	3	3	4	–	2	17	59	26
4.–5.	Sebastian Höppner	G Frankfurt	–	–	–	–	–	–	–	0	79	26
6.–7.	Anastázia Jermolájeva		–	–	–	–	–	–	–	0	76	25
6.–7.	Jan Novák	G Praha – Nad Alejí	3	2	–	3	4	–	2	14	61	25
8.–9.	Matej Dubový	G Trenčín	–	4	1	3	4	–	1	13	51	21
8.–9.	Michael Komm	G Praha – Parlérova	–	–	–	–	–	–	–	0	72	21
10.–11.	Jakub Galgonek	G Frýdek-Místek – ČSA	–	–	4	3	–	–	–	7	91	20
10.–11.	Pavel Kwiecien	G Dvůr Králové	3	1	–	3	5	–	1	13	50	20
12.–13.	Miroslav Frost	G Brno – Elgartova	1	3	–	3	4	–	–	11	63	19
12.–13.	Miroslav Kačena	G Trenčín	2	1	4	3	–	–	2	12	61	19
14.	Jakub Kratochvíl	G Čáslav	3	0	2	3	–	–	–	8	47	18
15.–17.	Anna Fučíková	G Třebíč	0	–	2	–	5	–	2	9	55	16
15.–17.	Jindřich Štástka	G Sokolov	1	–	–	3	–	–	4	8	59	16

15.–17.	David Šubrt	G Děčín	1	1	3	3	2	–	4	14	44	16
18.–20.	Zdeněk Čejka	G Praha – U Lib. zámku	–	–	–	–	–	–	–	0	87	13
18.–20.	Vratislav Chudoba	G Ostrava – Poruba	2	–	4	–	–	–	2	8	54	13
18.–20.	Sergej Maroz	G L. Pika, Plzeň	3	2	4	2	–	–	2	13	37	13
21.–22.	Tomáš Dzetkulič	G Michalovce	–	–	–	–	–	–	–	0	80	12
21.–22.	Michal Hajn	G Jihlava	–	–	–	1	–	–	–	1	75	12
23.–25.	Jiří Eliášek	G Trutnov	3	–	–	3	–	–	–	6	85	11
23.–25.	Milan Jalový	GOA Blansko	2	2	–	–	–	–	–	4	79	11
23.–25.	Tomáš Ježo	G Humenné	–	–	–	–	–	–	–	0	100	11
26.	Jiří Hitschfeld	COP Hronov	0	0	0	3	1	–	1	5	21	10
27.–30.	Pavel Hančar	SPŠ Jičín	–	2	3	3	–	–	–	8	64	9
27.–30.	Ľudovít Kontšek	G Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	0	36	9
27.–30.	Ondřej Srba	G Příbor	1	2	1	–	–	–	–	4	47	9
27.–30.	Ondřej Valehrach		3	–	–	2	–	–	1	6	45	9
31.	Jiří Kosina	GOA Blansko	–	–	–	–	–	–	–	0	100	7
32.	Miroslav Krús	G Klatovy	–	–	–	2	–	–	0	2	29	6
33.–35.	Lenka Beranová	G Klatovy	–	–	–	3	–	–	2	5	56	5
33.–35.	Iva Kouřilová	GOA Blansko	–	–	–	–	–	–	–	0	50	5
33.–35.	Ondřej Vencálek	G Frýdek-Místek – ČSA	–	–	–	–	–	–	–	0	46	5
36.–37.	Tomáš Buchta	G Praha – Zborovská	–	–	–	–	–	–	–	0	100	4
36.–37.	Michal Kabát	G Púchov	0	–	–	–	4	–	–	4	50	4
38.–40.	Jan Beneš	Biskupské G Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	43	3
38.–40.	Jiří Palek	G Nové Strašecí	–	–	–	–	–	–	–	0	75	3
38.–40.	Chia Huei Tan		–	2	–	–	1	–	–	3	25	3
41.	Tomáš Kovaľ	G Michalovce	–	–	–	–	–	–	–	0	18	2
42.–43.	Jan Klas	G Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	0	–	0
42.–43.	Lenka Němcová	SGŠ Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	0	–	0

Kategorie třetích ročníků

	Jméno	Škola	1	2	3	4	5	6	S2	II	%	Σ
	Studentka Pilná	UK MFF	3	4	4	3	5	8	6	33	100	66
1.	Miroslav Hejna	G Rychnov n. K.	3	4	4	3	6	7	6	33	91	60
2.	Karel Tůma	G Moravská Ostrava	3	3	1	3	3	3	1	17	65	43
3.–4.	Zdeněk Moravec	G Blansko	1	4	3	3	5	–	2	18	71	41
3.–4.	Jan Prachař	G Rychnov n. K.	1	4	4	3	–	6	2	20	79	41
5.	Lukáš Chvátal	G Brno – Vejrostova	3	3	4	3	4	–	2	19	77	40
6.	Tibor Vansa	G Moravská Ostrava	3	3	4	3	4	1	1	19	58	38
7.–8.	Michal Bareš	G Plzeň – Mikuláš. nám.	3	–	–	3	–	–	4	10	88	36
7.–8.	Jaroslav Trnka	G Praha – Nad Ohradou	1	4	3	3	5	2	2	20	55	36
9.	Václav Cviček	G Frýdek-Místek – ČSA	1	3	3	3	5	–	2	17	53	31
10.	Jiří Lipovský	G Bystřice n. Pernštejnem	3	1	–	3	–	–	2	9	63	22
11.	Vít Šípál	G Ústí n. L. – Jateční	1	2	–	3	–	–	3	9	49	19
12.	Josef Matějička	G Žilina	1	0	1	2	2	–	1	7	24	13
13.–14.	Luboš Matásek	G Plzeň – Mikuláš. nám.	1	–	–	3	–	–	–	4	46	12
13.–14.	Radoslav Šafran	G Košice	0	–	2	–	5	–	–	7	50	12
15.–16.	Michaela Jirků	G Praha – Arabská	1	–	–	–	4	–	0	5	33	11
15.–16.	Tomáš Kadlček	G Uherský Brod	–	–	–	–	–	–	–	0	100	11
17.–20.	Barbora Galaczková	G Třinec	0	0	–	3	4	–	–	7	39	9

17.–20.	Miloslav Havelka	G Zastávka	–	–	–	–	–	–	–	0	33	9
17.–20.	Lukáš Snášel	COP Hronov	0	0	0	3	–	–	–	3	24	9
17.–20.	Lukáš Vozdecký	G Brno – Vejrostova	1	1	–	3	–	–	4	9	56	9
21.	Vít Urbánek	G Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	0	100	8
22.–25.	Kateřina Jelénková	SZŠ, G a RŠ Staré Město	–	–	–	3	–	–	–	3	55	6
22.–25.	Jaroslav Kudlička	G Hodonín	–	–	–	–	–	–	–	0	40	6
22.–25.	Nina Sainerová	G Praha – U Lib. zámku	–	–	–	–	–	2	–	2	30	6
22.–25.	Jaroslav Štencel	COP Hronov	–	–	–	3	–	–	–	3	33	6
26.–27.	Marek Vyšinka	G Brno – Žižkova	–	–	–	–	–	–	–	0	42	5
26.–27.	Miroslav Zgažar	SPŠCH Ostrava	–	–	–	3	–	–	–	3	50	5
28.–32.	David Bezucha	G Liberec	1	–	–	–	–	–	–	1	36	4
28.–32.	Pavel Klouda	G Kyjov	–	–	–	–	–	–	–	0	24	4
28.–32.	Jan Křivka	COP Hronov	–	0	–	–	–	–	–	0	33	4
28.–32.	Radim Kusák	G Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	100	4
28.–32.	Milan Mareš		–	–	–	–	–	–	–	0	17	4
33.–34.	Štěpán Mančík	G Uherský Brod	–	–	–	–	–	–	–	0	100	3
33.–34.	Matěj Týč	G Zastávka	–	–	–	–	–	–	–	0	20	3
35.	Jan Chmelař	G Hranice	–	–	–	–	–	–	–	0	67	2
36.–37.	Zuzana Svobodová	G Zlaté Moravce	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0
36.–37.	David Vrba	ZŠ a G Konice	–	–	–	–	–	–	–	0	–	0

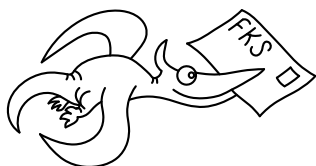
Kategorie druhých ročníků

	Jméno	Škola	1	2	3	4	5	6	S2	II	%	Σ
	Studentka Pilná	UK MFF	3	4	4	3	5	8	6	33	100	66
1.	Matouš Ringel	G Broumov	3	2	4	3	6	–	3	21	67	39
2.	Petr Houštěk	G Pelhřimov	3	2	4	3	4	4	2	22	58	36
3.	Alexandr Kazda	G Praha – Nad Alejí	–	–	4	3	6	–	–	13	85	33
4.	Boris Gažovič	G Humenné	4	2	–	3	–	4	5	18	70	30
5.	Jana Matějová	SPŠ Chrudim	3	–	–	3	–	–	2	8	51	23
6.	Zuzana Rozlívková	G B.N. Hradec Králové	3	0	3	–	5	–	0	11	41	21
7.	Martin Rybář	GOA Blansko	2	2	1	–	–	–	–	5	63	19
8.	Petr Dostál	G Žamberk	3	–	–	3	–	–	–	6	52	15
9.	Pavel Hála	G Český Krumlov	1	1	2	3	2	–	–	9	35	12
10.–12.	Pavol Lakatoš	G Velké Kapušany	–	1	0	3	3	–	–	7	37	11
10.–12.	Ivan Patáčík	G Partizánské	0	2	0	–	5	–	–	7	31	11
10.–12.	Lucie Strmisková	G Kyjov	1	–	–	3	–	–	–	4	44	11
13.–14.	Jana Babováková	G Most	1	1	3	–	2	–	–	7	38	9
13.–14.	Martina Smolová	G Písek	0	0	2	–	4	–	–	6	23	9
15.–20.	Miroslav Frantes	G Benešov	1	–	–	–	5	–	–	6	67	8
15.–20.	Michal Havel	COP Hronov	1	0	–	3	–	–	–	4	32	8
15.–20.	Filip Kozel	COP Hronov	–	0	0	3	2	–	–	5	33	8
15.–20.	Vojtěch Krejčířík	G Kroměříž	3	2	–	–	–	–	–	5	80	8
15.–20.	Jakub Kubeček	COP Hronov	0	0	0	3	1	–	–	4	19	8
15.–20.	Libor Kukačka	GOA Vrchlabí	0	–	–	–	5	–	–	5	67	8
21.	Zdeněk Váňa	COP Hronov	1	0	0	–	1	–	–	2	18	7
22.–23.	Eva Lovíšková	G Nové M. na Moravě	1	1	–	–	3	–	–	5	30	6
22.–23.	Vladimír Sommer	G Žďár n. Sázavou	–	2	–	–	–	–	–	2	75	6
24.	Stanislav Plánička	G Klatovy	3	1	–	–	–	–	–	4	50	5

25.-32.	Peter Buhaj	G Snina	0	0	0	-	2	-	-	2	14	4
25.-32.	Jakub Kopecký	G Trenčín	-	1	-	-	3	-	-	4	44	4
25.-32.	Jan Křetínský	G Brno	4	-	-	-	-	-	-	4	133	4
25.-32.	Jan Křivonožka	G Bílovec	-	-	-	-	-	-	-	0	57	4
25.-32.	Hana Suchomelová	G Trenčín	-	2	-	-	2	-	-	4	44	4
25.-32.	Mária Šedivá	G Trenčín	-	2	-	-	2	-	-	4	44	4
25.-32.	Jakub Tichý	G Praha – Arabská	-	-	-	-	-	-	-	0	57	4
25.-32.	Ivo Zábojník	G Tábor	-	-	-	-	4	-	-	4	80	4
33.-38.	Lukáš Bartík	G Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	38	3
33.-38.	Petr Mindžak	GOA Sedlčany	-	-	-	-	-	-	-	0	75	3
33.-38.	Markéta Novotná	G Hranice	-	-	-	-	-	-	-	0	38	3
33.-38.	Martin Padevět	G Kostelec nad Č. lesy	-	-	-	-	-	-	-	0	38	3
33.-38.	Radoslav Sopoliga	G Svidník	0	-	-	0	0	-	-	0	16	3
33.-38.	Lukáš Voleský	COP Hronov	0	0	2	-	-	-	-	2	12	3
39.-42.	Lukáš Burian	G Kladno	-	-	-	-	-	-	-	0	50	2
39.-42.	Martina Marenčoková	G Frýdek-Místek	-	-	-	-	-	-	-	0	50	2
39.-42.	Luboš Račanský	G Benešov	-	-	-	-	-	-	-	0	29	2
39.-42.	Tomáš Ručka	G Kladno	0	-	-	-	-	-	-	0	29	2
43.-44.	Jaroslav Bušek	G Rumburk	1	-	-	-	-	-	-	1	33	1
43.-44.	Lucie Gráfová	G Ostrava – Hrabůvka	0	-	-	-	-	-	-	0	10	1
45.-46.	Jakub Černý	G Chrudim	-	-	-	-	-	-	-	0	0	0
45.-46.	Rudolf Podoba	G Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	0	0

Kategorie prvních ročníků

Jméno	Škola	1	2	3	4	5	6	S2	II	%	Σ	
Studentka Pilná	UK MFF	3	4	4	3	5	8	6	33	100	66	
1.	Anton Repko	ZŠ a G Prešov	3	0	2	3	4	1	3	16	55	36
2.	Andrej Pidik	G Nove Mesto nad Váhom	1	0	2	2	4	-	-	9	29	15
3.-4.	Tomáš Uhrin	G Michalovce	-	-	-	-	4	-	-	4	89	8
3.-4.	Jana Vrábelová	ZŠ Trenčín	-	3	-	-	4	-	-	7	62	8
5.-6.	Ondrej Bogár	ZŠ Trenčín	-	2	1	-	4	-	-	7	54	7
5.-6.	Karel Hofman	COP Hronov	3	-	-	-	-	-	-	3	100	7
7.-8.	Radek Beneš	COP Hronov	1	0	0	-	1	-	-	2	16	5
7.-8.	Ján Čuvala	ZŠ Trenčín	-	-	-	-	4	-	-	4	29	5
9.	Zdeněk Lochman	COP Hronov	-	-	-	-	-	-	-	0	27	4



FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>

e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cz

e-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář, který je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF, je organizován studenty UK MFF za podpory Ústavu teoretické fyziky UK MFF a jeho zaměstnanců a Jednoty českých matematiků a fyziků.