14. ročník, úloha V . 1 ... *ošklivá sonda* *(3 body; průměr ?; řešilo 20 studentů)*

Představte si rovinný povrch nějakého materiálu, zaveďme souřadnou soustavu tak, že povrch splývá s rovinou $z = 0$. Každý bod povrchu popišme odrazivostí R, což je poměr odražené a dopadající intenzity záření. Víme, že ve směru osy x je R konstantní a ve směru osy y je $R(y)$ periodickou funkcí s periodou P. Máme k dispozici sondu, která svítí na povrch a zpětně snímá odraženou intenzitu. Můžeme s ní pohybovat ve směru osy y. Sonda však není nekonečně "jemná", svazek nemůžeme zaostřit do jednoho bodu, vždy budeme mít stopu o nenulové šířce D. Sonda tedy snímá průměr odražené intenzity z oblasti, na kterou svítí. Vaším úkolem je napsat, jak pomocí takové sondy zjistit periodu odrazivosti P. Lze to pro všechny rozměry sondy?

Úloha ze života Jirky Franty.

Protože sonda není schopna zaostřit světelný svazek do jednoho bodu, odpovídá naměřená odrazivost R_m průměrné hodnotě odrazivosti R v oblasti, na kterou sonda svítí. Funkce $R(y)$ má periodu P (základní perioda), a proto bude mít i naměřená odrazivost $R_m(y)$ periodu P. Tato perioda však nemusí být základní. To znamená, že pro základní periodu P_m naměřené odrazivosti platí $P_m = P/n$, kde n je přirozené číslo, nebo naměřená odrazivost je konstantní funkce. O tom, že periody P a P_m se obecně nerovnají, se můžeme jednoduše přesvědčit v případě, kdy má stopa tvar čtverce o straně délky D. Pokud je totiž rozměr sondy D roven celočíselnému násobku periody P, potom je naměřená odrazivost $R_m(y)$ vždy konstantní funkcí a nemůžeme tedy určit periodu odrazivosti P.

Perioda P_m naměřené odrazivosti je tudíž dolním odhadem periody P odrazivosti povrchu. Odhad periody P lze zlepšit, pokud použijeme různé rozměry a tvary stop (změnu tvaru nebo rozměru stopy lze docílit použitím clon).

Pokud bude rozměr sondy mnohem menší než je perioda odrazivosti povrchu, potom naměřená odrazivost $R_m(y)$ bude mít prakticky stejný tvar jako odrazivost povrchu $R(y)$. V tomto případě se tedy periody P_m a P budou rovnat. V opačném případě, kdy budou rozměry sondy mnohem větší než je perioda odrazivosti, bude naměřená odrazivost prakticky konstantní funkce a periodu odrazivosti povrchu nebude možno určit.

Abychom mohli určit periodu odrazivosti povrchu, je tedy nutné, aby tato perioda nebyla mnohem menší než rozměr stopy sondy. Dolním odhadem periody odrazivosti povrchu je perioda naměřené odrazivosti. Odhad lze zlepšit použitím různých tvarů a rozměrů sond. Pokud se tvary naměřených odrazivostí $R_m(y)$ od sebe příliš neliší a všechny mají stejnou periodu, potom je velmi pravděpodobné, že je tato perioda rovna periodě odrazivosti povrchu. V případě, že všechny naměřené odrazivosti jsou konstantní funkce, je zřejmě perioda odrazivosti povrchu mnohem menší než je rozměr stop.

K provedení důkladnější analýzy problému „ošklivé sondy“ je potřeba užít trochu „složitější“ matematický aparát. Uvažujme tvar stopy, který je osově symetrický vzhledem k osám x a y. Tento tvar popišme sudou funkcí $f(z)$ definovanou na intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Funkce $g(z)$, která popisuje stopu, jejíž rozměr ve směru osy y je roven $2D$, je dána vztahem $g(z) = Df(z/D)$. Pro naměřenou odrazivost potom platí

$$R_m(y) = \frac{\int_{-D}^{D} 2g(z)R(y+z)\,\mathrm{d}z}{\int_{-D}^{D} 2g(z)\,\mathrm{d}z} = \frac{\int_{-1}^{1} f(z)R\left(y+Dz\right)\mathrm{d}z}{\int_{-1}^{1} f(z)\,\mathrm{d}z}\,.$$

Pokud je odrazivost $R(y)$ dostatečně hladká funkce, potom lze užít rozvoj do Fourierovy řady, neboť $R(y)$ je periodická funkce s periodou P

$$R(y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n \exp\left(\frac{2\pi i n y}{P}\right) .$$

Je-li $R(y)$ dostatečně hladká, potom je možno zaměnit pořadí sumace a integrace (řadu je možno integrovat člen po členu). Koeficienty A_n jsou jednoznačně určeny funkcí $R(y)$, neboť platí

$$\int_0^P R(y) \exp\left(-\frac{2\pi i m y}{P}\right) \mathrm{d}y = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n \int_0^P \exp\left(\frac{2\pi i(n-m)y}{P}\right) \mathrm{d}y = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n P \delta_{mn} = P A_m ,$$

kde δ_{mn} je Kroneckerův symbol, který je roven jedné pro $m = n$ a nule pro $m \neq n$. Pro koeficienty Fourierovy řady tedy dostáváme vztah

$$A_n = \frac{1}{P} \int_0^P R(y) \exp\left(-\frac{2\pi i n y}{P}\right) \mathrm{d}y .$$

Pokud je funkce $R(y)$ reálná, potom platí: $A_n = A^*_{-n}$.

Užitím Fourierovy řady dostaneme

$$\int_{-1}^{1} f(z) R(y + Dz)\,\mathrm{d}z = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n \exp\left(\frac{2\pi i n y}{P}\right) \int_{-1}^{1} f(z) \exp\left(\frac{2\pi n D z}{P}\right) \mathrm{d}z .$$

Ze sudosti funkce $f(z)$ plyne

$$\int_{-1}^{1} f(z) \exp\left(\frac{2\pi i n D z}{P}\right) \mathrm{d}z = \int_{-1}^{1} f(z) \left(\cos\frac{2\pi n D z}{P} + i \sin\frac{2\pi n D z}{P}\right) \mathrm{d}z =$$

$$= 2 \int_0^1 f(z) \cos\left(\frac{2\pi n D z}{P}\right) \mathrm{d}z .$$

Definujme novou funkci $F(\omega)$

$$F(\omega) = \frac{\int_0^1 f(z)\cos(\omega z)\,\mathrm{d}z}{\int_0^1 f(z)\,\mathrm{d}z} .$$

Naměřenou odrazivost $R_m(y)$ je tedy možno vyjádřit jako následující Fourierovu řadu

$$R_m(y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n F\left(\frac{2\pi n D}{P}\right) \exp\left(\frac{2\pi i n y}{P}\right) .$$

Vlivem konečných rozměrů stopy sondy dojde ke „zkreslení“ průběhu odrazivosti.

Je-li hodnota ω blízká nule, potom je hodnota $F(\omega)$ blízká jedné. To znamená, že v případě $P \gg D$ má naměřená odrazivost prakticky stejný tvar jako odrazivost povrchu a naměřená perioda odrazivosti tedy odpovídá skutečné periodě. Pro $\omega \to \infty$ je $F(\omega) \to 0$. Pokud tedy platí $P \ll D$, potom je naměřená odrazivost prakticky konstantní funkcí a nelze tudíž určit periodu odrazivosti povrchu.

K tomu, aby se perioda naměřené odrazivosti rovnala periodě P, je nutnou a zároveň postačující podmínkou nenulovost funkce $F(\omega)$. (Pokud má funkce $F(\omega)$ nulový bod, potom existuje rozměr stopy D, při kterém se „smaže alespoň jedna Fourierova frekvence v rozvoji odrazivosti“, což pro určitý tvar odrazivosti povrchu způsobí zmenšení periody naměřené odrazivosti.) Tuto nepříjemnou vlastnost má například tvar čtverce nebo kruhu. Existují však tvary, pro které je $F(\omega)$ nenulová. Příkladem je tvar popsaný funkcí $f(z) = (1-z)^2$, pro který dostaneme

$$F(\omega) = 6\,\frac{\omega - \sin\omega}{\omega^3}\,,$$

což je nenulová funkce. V tomto případě je perioda naměřené odrazivosti vždy rovna skutečné periodě P. To však platí pouze v případě, kdy měříme nekonečně přesně. Pokud měříme s konečnou přesností, potom pro $D \gg P$ nebo pro „málo zvlněnou“ odrazivost povrchu bude naměřená odrazivost konstantní funkcí a nebudeme tudíž schopni určit periodu odrazivosti.

V našem řešení jsme předpokládali rovnoměrné osvícení povrchu v osvětlené oblasti. Pokud bychom uvažovali nerovnoměrné osvícení, potom by byl postup řešení obdobný, pouze bychom dostali složitější vztah pro funkci $F(\omega)$.

Karel Kolář

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.