

14. ročník, úloha III. 1 ... rotující koule (5 bodů; průměr ?; řešilo 34 studentů)

Nad vodorovnou podložkou se nachází homogenní koule o poloměru R , která rotuje úhlovou rychlostí ω_0 kolem vodorovné osy. Jakou rychlostí v_0 ji musíme vrhnout ve vodorovném směru kolmém na osu rotace, aby se po sérii dopadů na podložku zastavila? Valivý odpor je nulový, nikoliv však smykové tření.

Modifikovaná úloha z 22. MFO na Kubě, zadal Honza Houšek.

Z první a druhé věty impulsové plyne

$$F = m \frac{dv}{dt} \quad M = J \frac{d\omega}{dt},$$

kde F je třecí síla, kterou působí podložka na kouli, M je její moment vůči ose procházející středem koule. Moment setrvačnosti koule vůči ose procházející středem koule je $J = \frac{5}{2}mR^2$. Dále víme, že $M = FR$. Z těchto vztahů získáme rovnici

$$\frac{dv}{dt} = \frac{5}{2}R \frac{d\omega}{dt}.$$

Jejím řešením je $v = \frac{5}{2}R\omega + C$, konstantu C určíme z počátečních podmínek $C = v_0 - \frac{5}{2}R\omega_0$. Získáme tedy $v - v_0 = \frac{5}{2}R(\omega - \omega_0)$. Jelikož chceme, aby se koule zastavila, tak musí být velikost rychlosti a úhlové rychlosti nulová. Můžeme tedy říci, že koule se zastaví pokud bude mít na počátku rychlost $v_0 = \frac{5}{2}R\omega_0$. Počáteční rychlost má stejný směr jako bod, který je nejbližší podložce.

Jan Houfek