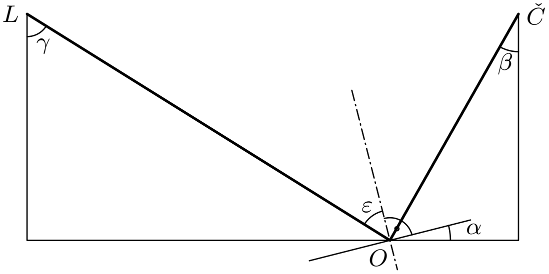
14. ročník, úloha II . 1 ... ***lampa na hladině*** *(4 body; průměr ?; řešilo 39 studentů)*

Jdete večer kolem řeky šířky L. Na protějším břehu stojí lampa ve výšce h nad hladinou řeky. Když se podíváte na hladinu, uvidíte na vodě obraz lampy. Je-li hladina rozčeřená, tento obraz se „rozmaže“. Určete úhlovou šířku a délku pod jakou tento útvar vidíte. Předpokládejte, že vaše oči jsou ve stejné výšce nad hladinou jako lampa. Zčeřenou hladinou rozumíme vlnky s maximálním náklonem α ve všech směrech a výškou zanedbatelnou vůči h.

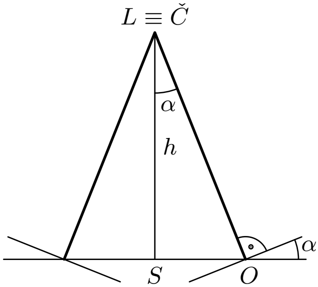
Proseminář z optiky ve třetím semestru MFF.



Obr. 1

Nejdřív určíme úhlovou délku. Uvažujme, že sklon hladiny vůči horizontální rovině může být od $-\alpha$ do α. Z obr. 1 vidíme, že nejblíže ke člověku je odraz pro sklon hladiny α. Označme β úhel, pod kterým vidíme tento konec obrazu. Když potom označíme úhel odrazu ε, dostáváme podle obr. 1 vztah $\beta = 90^\circ - (\varepsilon - \alpha)$. Nejvzdálenější bod odrazu určíme analogicky, když si představíme sklon α, ale v opačném směru. Tedy jako kdybychom zaměnili L za $\check{C}$. Proto úhel, pod kterým vidíme nejvzdálenější konec odrazu, je γ. Z obr. 1 opět vidíme, že $\gamma = 90^\circ - (\varepsilon + \alpha)$ a úhlová délka je rozdíl úhlů, pod kterými vidíme nejvzdálenější a nejbližší konec obrazu ve vodě, $\gamma - \beta = 2\alpha$.

Teď spočteme úhlovou šířku. Označme $SO\check{C}$ trojúhelník, z kterého tuto šířku budeme počítat, kde $\check{C}$ je člověk, S střed mezi člověkem a lampou a O je bod odrazu. Víme, že nejvzdálenější bod odrazu ve směru kolmém na spojnici člověka a lampy bude ve stejné vzdálenosti od člověka a od lampy. Takže spojnice obou odrazů bude procházet středem, úhel $O\check{C}S$ je polovina námi hledané úhlové šířky. Nejdříve určíme délky stran tohoto pravoúhlého trojúhelníku. Z obr. 2 vidíme, že $|SO| = h \operatorname{tg} \alpha$ (pozor, na obrázku je jenom průmět trojúhelníku $SO\check{C}$ do svislé roviny). Vzdálenost $\check{C}S$ je z Pythagorovy věty $\sqrt{(L/2)^2 + h^2}$. Potom pro úhlovou šířku dostáváme



Obr. 2

$$2 \operatorname{arctg} \frac{|SO|}{|S\check{C}|} = 2 \operatorname{arctg} \frac{h \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{(L/2)^2 + h^2}} \,.$$

Miroslav Kladiva

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.