

Zadání V. série



Termín odeslání: 9. dubna 2001

Úloha V. 1 ... ošklivá sonda

Představte si rovinný povrch nějakého materiálu, zavedme souřadnou soustavu tak, že povrch splývá s rovinou $z = 0$. Každý bod povrchu popíšeme odrazivostí R , což je poměr odražené a dopadající intenzity záření. Víme, že ve směru osy x je R konstantní a ve směru osy y je $R(y)$ periodickou funkcí s periodou P . Máme k dispozici sondu, která svítí na povrch a zpětně snímá odraženou intenzitu. Můžeme s ní pohybovat ve směru osy y . Sonda však není nekonečně "jemná", svazek nemůžeme zaostřit do jednoho bodu, vždy budeme mít stopu o nenulové šířce D . Sonda tedy snímá průměr odražené intenzity z oblasti, na kterou svítí. Vaším úkolem je napsat, jak pomocí takové sondy zjistit periodu odrazivosti P . Lze to pro všechny rozměry sondy?

Úloha V. 2 ... dělo na lodi

Děla na bitevních lodích se nabíjejí následujícím způsobem: do hlavně se dá střela o hmotnosti M a za ní určitý počet balíku s výbušninou (objem jednoho balíku je V_0), podle toho jak daleko chceme střílet. Kolikrát se zvětší dostřel takového děla, když nabijeme dvojnásobné množství výbušniny? Výbuch si představujte tak, že najednou se místo výbušniny objeví dvouatomový plyn o teplotě T_0 a tlaku p_0 . Ráže děla je deset palců. Odpor vzduchu zanedbejte.

Úloha V. 3 ... rozlišení radaru

Mějme radar, který je schopný rozlišit těleso s průměrem 10 km ve vzdálenosti Měsíce. Jak velké těleso je schopen rozlišit ve vzdálenosti Slunce? Jaká je teoretická vzdálenost, do které je radar schopný "vidět"?

Úloha V. 4 ... supermetro

Ve Švýcarsku plánují vybudování celostátního „metra“. Vlaky mají jezdit na magnetickém polštáři tunelem, ze kterého je částečně vyčerpaný vzduch, a dosahovat rychlosti kolem $500 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Tunel však nelze dokonale utěsnit. Předpokládejme, že chceme udržet tlak na hodnotě $0,05 p_a$, ale bez neustálého odčerpávání by za 1 den vzrostl na $0,5 p_a$. Spočtete výkon, jaký je nutný na odčerpávání vzduchu ze 100 km tohoto tunelu, je-li jeho průměr 5 m, účinnost odčerpávání oproti ideálně pracujícímu stroji 10% a teplota 6°C . S čím lze takový výkon porovnat?

Úloha V. P ... upíři

Fyzikálně zdůvodněte, proč není upír vidět v zrcadle, a taktéž navrhnete vynálezy, které by této skutečnosti mohly využít.

Úloha V. Exp ... za mřížemi

Určete mřížkovou konstantu (vzdálenost dvou nejbližších vláken) u vzorku kovové mřížky, který najdete přilepený někde na letáku, jež držíte v ruce. Použijte co možná nejvíce různých metod a jejich výsledky porovnejte.

Pokud byste vzorek nenašli, tak nám dejte vědět (napíšte, pošlete email) a my vám jej pošleme.



Řešení III. série

Úloha III. 1 ... rotující koule (5 bodů, řešilo 34 studentů)

Nad vodorovnou podložkou se nachází homogenní koule o poloměru R , která rotuje úhlovou rychlostí ω_0 kolem vodorovné osy. Jakou rychlostí v_0 ji musíme vrhnout ve vodorovném směru kolmém na osu rotace, aby se po sérii dopadů na podložku zastavila? Valivý odpor je nulový, nikoliv však smykové tření.

Modifikovaná úloha z 22. MFO na Kubě, zadal Honza Houšek.

Z první a druhé věty impulsové plyne

$$F = m \frac{dv}{dt} \quad M = J \frac{d\omega}{dt},$$

kde F je třecí síla, kterou působí podložka na kouli, M je její moment vůči ose procházející středem koule. Moment setrvačnosti koule vůči ose procházející středem koule je $J = \frac{5}{2}mR^2$. Dále víme, že $M = FR$. Z těchto vztahů získáme rovnici

$$\frac{dv}{dt} = \frac{5}{2}R \frac{d\omega}{dt}.$$

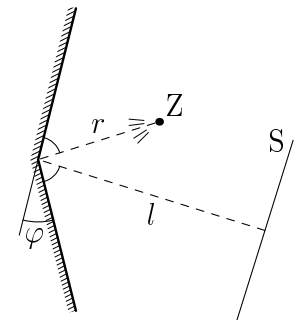
Jejím řešením je $v = \frac{5}{2}R\omega + C$, konstantu C určíme z počátečních podmínek $C = v_0 - \frac{5}{2}R\omega_0$. Získáme tedy $v - v_0 = \frac{5}{2}R(\omega - \omega_0)$. Jelikož chceme, aby se koule zastavila, tak musí být velikost rychlosti a úhlové rychlosti nulová. Můžeme tedy říci, že koule se zastaví pokud bude mít na počátku rychlost $v_0 = \frac{5}{2}R\omega_0$. Počáteční rychlost má stejný směr jako bod, který je nejbližší podložce.

Jan Houfek

houfj0am@mbox.troja.mff.cuni.cz

Úloha III. 2 ... interference na zrcadlech (4 body, řešilo 19 studentů)

Mějme bodový zdroj (Z) monochromatického světla umístěný přede dvěma rovinnými zrcadly (obr. 1). Vzdálenost zdroje od bodu dotyku zrcadel je r a vzdálenost tohoto bodu od stínítka (S) je l . Na stínítku se zobrazují světlé a tmavé proužky. Dva sousední světlé proužky jsou od sebe ve vzdálenosti d . Spočítejte úhel φ mezi zrcadly, můžete předpokládat, že je velmi malý. Předpokládejte též, že ze zdroje nedopadá žádné světlo přímo na stínítko.

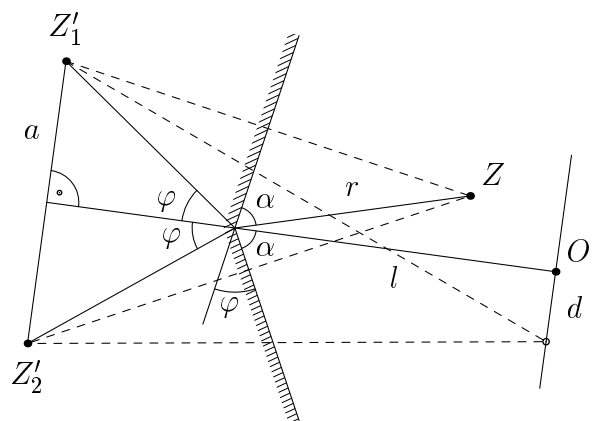


Obr. 1

Podle zápočtové písemky z optiky ve třetím semestru MFF.

Interferenci světla odraženého od zrcadel si můžeme představit jako interferenci ze dvou zdrojů, které vzniknou zobrazením zdroje Z oběma zrcadly. Jak je vidět z geometrie na obr. 2, tyto dva zdánlivé zdroje budou od stínítka vzdáleny oba dva stejně. Protože je úhel φ malý, vzdálenost obrazů zdroje od sebe je $2a = 2r\varphi$. Obdobně vzdálenost těchto obrazů od stínítka je rovna $l' = l + r$.

Při interferenci se sčítají dvě harmonické vlny, které mají vůči sobě posunutou fázi. Maximální intenzita (světlé proužky) je v místech, kde je tento posun fáze roven sudému násobku π , tedy když je



Obr. 2

dráhový rozdíl paprsků roven celému násobku λ . Naopak minimální intenzita (tmavé proužky) je v místech, kde je dráhový rozdíl paprsků roven lichému násobku vlnové délky světla $\lambda/2$.

V našem případě stačí určit vzdálenost maxima, které vznikne v bodě O, a dalšího nejbližšího maxima, neboť vzájemné vzdálenosti dalších proužků jsou přibližně stejné. První maximum je tedy od bodu O ve vzdálenosti d , kterou hledáme. Vzdálenosti tohoto maxima od jednotlivých zdrojů jsou:

$$\begin{aligned}d_1^2 &= l'^2 + (d - a)^2, \\d_2^2 &= l'^2 + (d + a)^2.\end{aligned}$$

Z toho plyne $d_1^2 - d_2^2 = 4da$ a protože a a d jsou mnohem menší než l platí $d_1 + d_2 = 2l'$. Tedy:

$$d_1 - d_2 = \frac{2da}{l'} = \frac{2dr\varphi}{l + r}.$$

Aby v tomto bodě vzniklo maximum musí být tento dráhový rozdíl roven λ . Tedy

$$\varphi = \lambda \frac{r + l}{2rd}$$

je hledaný úhel mezi zrcadly.

Karel Honzl
Karel.Honzl@st.cuni.cz

Úloha III.3 ... dnem vzhůru (4 body, řešilo 68 studentů)

Ve velké nádobě s vodou je částečně ponořena dnem vzhůru válcová sklenice. Hladina vody v nádobě i ve sklenici je stejná a je vzdálena $l = 10$ cm ode dna sklenice. Teplota vzduchu je $t_0 = 20^\circ\text{C}$ a atmosférický tlak je $p_0 = 100$ kPa. O jakou výšku h stoupne hladina vody ve sklenici, jestliže se teplota sníží o $\Delta t = 10^\circ\text{C}$ a tlak stoupne o $\Delta p = 2,0$ kPa ?

Počítalo se na cvičení k přednášce Fyzika I, zadal Honza Houštěk.

Tlak plynu ve skleničce je roven vnějšímu tlaku, což lze nahlédnouti následující úvahou. V kapalině je všude stejný tlak, poněvadž ji považujeme za nestlačitelnou. V jistém bodě pod skleničkou bude tlak roven tlaku plynu ve skleničce plus hydrostatickému, ale ten se musí rovnat tlaku atmosférickému plus stejný hydrostatický tlak, poněvadž jsou hladiny vyrovnány. Tady si někteří řešitelé uvědomili, že sklenice neplave ve vodě, nýbrž musí být nějak upevněna. Vztlaková síla by skleněnou nádobu neudržela nad vodou, kvůli menší hustotě vody, a tlaková síla plynu uvnitř je stejná jako tlaková síla atmosférického tlaku. Za toto povšimnutí jsem uděloval bonus jeden bod. Teď se můžeme zabývat plynem ve sklenici, který budeme považovat za ideální. Můžeme tvrdit, že pro něj platí stavová rovnice ve tvaru

$$\frac{pV}{T} = \text{konst} . \quad (1)$$

Při změně vnějšího tlaku na tlak $p_1 = p_0 + \Delta p = 102$ kPa a teploty na $T_1 = T_0 + \Delta T = 283,15$ K se budeme zajímat o ustálený stav, kdy se teplota plynu ve skleničce vyrovná s okolní. Pak pro tlak ve sklenici bude platit

$$p_2 = p_1 - h\rho g ,$$

kde $g = 9,81$ m \cdot s⁻² je tíhové zrychlení a h je výška sloupce vody, o kolik stoupla hladina ve skleničce. Mnoho řešitelů zapomělo vzít do úvahy hydrostatický tlak vystouplého sloupce vody ve sklenici. Nádobu s vodou považujeme za velkou, proto pokles hladiny v nádobě zanedbáme. Pak si objem plynu vyjádříme jako $V_0 = lS$ pro teplotu T_0 a pro teplotu T_1 jako $V_1 = (l - h)S$, kde S je plocha podstavy skleničky. Dosazením do (1) získáme kvadratickou rovnici ve tvaru

$$0 = h^2 \rho g - h(l\rho g + p_0 + \Delta p) + \Delta pl - \frac{p_0 l \Delta T}{T_0} .$$

Řešení jsou dvě $h_1 = 10,3$ m, které zjevně nevyhovuje a $h_2 = 5,3$ mm.

Ladislav Michnovič
Ladislav.Michnovic@st.mff.cuni.cz

Úloha III.4 ... dnem vzhůru (4 body, řešilo 20 studentů)

Za jak dlouho se vypaří voda ze sklenice o výšce $h = 10$ cm za normálních podmínek? Předpokládejte, že vlhkost vzduchu těsně nad hladinou je neustále 99%.

Úlohu navrhl Karel Kouřil.

Představte si, že by při odpařování na hladinu vody foukal ventilátor. Pak by se voda určitě odpařila mnohem rychleji, než v zadaném případě. Naopak kdybychom stejně velkou vrstvu vody umístili do dlouhé tenké trubice ve které by vzduch prakticky neproudil, pak by se voda téměř neodpařovala. Z těchto příkladů můžeme usoudit, že rychlost vypařování závisí na rychlosti difuze molekul vodní páry z tenké vrstvičky téměř syté páry nad hladinou¹⁾ do takové vzdálenosti od hladiny, kde je rychlost proudění okolního vzduchu srovnatelná s rychlostí difuze molekul páry (tenká vrstva vzduchu nad hladinou je díky viskozitě vzduchu v klidu). Výpočet této rychlosti je však natolik složitý, že je prakticky neproveditelný.

Pozn. Někteří z vás našli řešení této úlohy v knize Feynmanovy přednášky z fyziky, ale podle mého názoru je toto řešení nesprávně. Autor zde totiž nějakým záhadným způsobem odhaduje koncentraci molekul vodní páry nad hladinou na $10 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$. Pokud si však najdete tlak syté páry vody při pokojové teplotě (asi 2 kPa), snadným výpočtem si ověříte, že tato koncentrace je o čtyři řády vyšší.

Pavel Augustinský

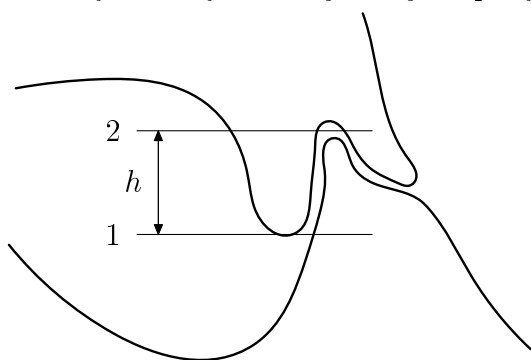
augup0am@mbox.troja.mff.cuni.cz

Úloha III.P ... občasný pramen (3 body, řešilo 50 studentů)

Na Slovensku ve Slovenském krasu je zajímavý pramen. Většinu času tento pramen vypadá, jako by byl vyschlý, a potom z něj najednou začne po nějakou dobu vytékat voda, a poté opět nic. Toto se stále opakuje. Jednotlivé intervaly jsou docela pravidelné (a dlouhé). Jak to funguje?

Na výletě do Sloveského krasu se nad tím zamýšlel Karel Kouřil.

Vzhledem k tomu, že občasný pramen funguje už poměrně dlouho (jinak by si ho nikdo ani nevšiml, a tudíž by ani nemohl dostat jméno) a navíc zřejmě vznikl samovolně, je třeba hledat co možná nejjednodušší řešení problému, jak že to vlastně je zařízené, což nám z úvah vylučuje všechny modely obsahující nějaké pohyblivé části, pohádkové bytosti, případně vodovod...



Obr. 3

Jako nejjednodušší a tedy i nejpravděpodobnější se jeví řešení schematicky znázorněné na obr. 3. Voda přitéká ze zcela normálního pramene do skalní jeskyně (ta klidně může existovat, je to krasová oblast) a pomalu ji naplňuje. Až hladina dosáhne výšky h voda přeteče a začne odtékat, pokud je průřez spáry, nebo pukliny, kterou voda vytéká dostatečně (ale ne příliš velký, odtéká voda rychleji, než se stačí doplňovat z pramene. Protože ale spára končí níž, než je místo, ve kterém do ní voda z jeskyně vtéká, odtékající voda "vysaje" celou jeskyni, ta se potom zase pomalu naplní a děj se opakuje.

Karel Kouřil

kourk0am@mbox.troja.mff.cuni.cz

Úloha III.Exp ... kapacita člověka (8 bodů, řešilo 19 studentů)

Změřte co nejvíce zdraví neohrožujícími způsoby elektrickou kapacitu člověka.

Kolibřík (Jiri Libra) si hrál s měřícím přístrojem a statickou elektřinou.

Teoretický úvod

Nejprve je teba si uvědomit, co vlastně máme měřit. Elektrická kapacita C je schopnost vodiče akumulovat volný náboj. Rozlišujeme kapacitu osamoceneného nabitého vodiče a kapacitu soustavy dvou navzájem izolovaných vodičů nabitých stejně velkým opačným nábojem (kondenzátoru).

¹⁾ V zadání bylo uvedeno že vlhkost vzduchu v této vrstvičce je 99%, což je špatně. Ve skutečnosti se vlhkost vzduchu v této vrstvičce mnohem více blíží ke 100%.

Kapacita osamocené vodiče C vyjadřuje, že potenciál φ_0 na povrchu vodiče je úměrný volnému el. náboji Q tohoto vodiče $Q = C\varphi_0$ (přičemž se předpokládá, že φ_0 je nulový v nekonečnu). Kapacita vodiče závisí na jeho tvaru a velikosti a na charakteru nevodivého prostředí, které vodič obklopuje. Například nabitá vodivá koule o poloměru R ve vakuu má kapacitu $C = 4\pi\epsilon_0 R$. Pro $R = 0,50$ m, což přibližně odpovídá poloměru koule, která by se uplácala z člověka dostáváme $C = 56$ pF.

Kapacita soustavy dvou navzájem izolovaných vodičů nabitých opačným nábojem Q , mezi nimiž je el. pole odstíněné od vnějších el. polí, je dána vztahem $C = q/|\varphi_{02} - \varphi_{01}|$, kde φ_{01} , φ_{02} jsou potenciály uvažovaných těles. Například pro kondenzátor tvořený dvěma rovnoběžnými vodivými deskami o ploše S a vzdálenosti d ($S \gg d^2$), mezi nimiž je vakuum, je $C = S\epsilon_0/d$.

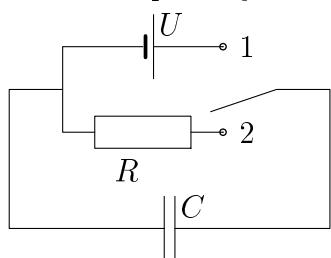
Kdybychom chtěli měřit kapacitu člověka coby osamocené vodiče, museli bychom ho odizolovat, nabít a změřit jeho potenciál vzhledem k nekonečnu, což samozřejmě neumíme, ale umíme změřit jeho potenciál vzhledem k zemi. Uděláme-li to a zároveň změříme náboj na člověku, můžeme spočítat kapacitu člověka jako kapacitu kondenzátoru, kde jednu desku tvoří člověk a druhou země.

Uvědomte si, že měřit kapacitu člověka tak, že vezmu nějaký přístroj či metodu pro měření kapacity kondenzátorů a člověka zapojím do elektrického obvodu tak, že se např. každou rukou chytne jeden z přívodových drátů, je naprostý nesmysl, neboť člověk sám o sobě není žádný kondenzátor.

Metody a výsledky měření

Pro měření jsme vybrali jednu z nejpřímochařejších metod měření kapacity, neboť např. měření kapacitoměrem může být zatíženo obrovskou systematickou chybou vyplývající z toho, že všechny běžné přístroje jsou konstruovány pro měření běžných kondenzátorů. Těžko zhodnotit, zda by kapacita kondenzátoru člověk–země šla změřit např. hojně používanou rezonanční metodou.

Zapojíme obvod podle obr. č. 4. Kondenzátor na obrázku je kondenzátor člověk–země, konkrétně jeden drát vede na topení, druhý držíme v ruce a on země jsme odizolováni např. gumovou podrážkou a kobercem. Nejprve kondenzátor nabijeme přes voltmetr zdrojem stejnosměrného napětí (v našem provedení $U = 20$ V), tomu odpovídá poloha spínače 1. Též by bylo možné se nabíjet statickou elektřinou, kupodivu pouhým třením ponožky o koberec se lze nabít až na několik voltů. Poté zdroj odpojíme a kondenzátor se začne přes voltmetr o odporu R vybíjet, na voltmetru pozorujeme klesající napětí.



Obr. 4

Pro napětí na kondenzátoru v každém okamžiku platí, že jeho úbytek je úměrný úbytku náboje, tj. proudu procházejícímu obvodem $dU = dQ/C = -Idt/C$, z Ohmova zákona známe proud, a tedy $\frac{dU}{dt} = -U/RC$, což je jednoduchá diferenciální rovnice, jejíž řešením je $U = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$. Pokud za čas t klesne napětí na voltmetru z hodnoty U_1 na U_2 , platí pro kapacitu kondenzátoru

$$C = \frac{t}{R \ln \frac{U_1}{U_2}} .$$

Kondenzátor člověk–země se vybíjel velmi rychle, proto jsme za čas t zvolili vzorkovací frekvenci voltmetru, která v našem případě byla $t = 0,5$ s (vyčteno z manuálu a ověřeno přibližným měřením na stopkách). Za hodnotu U_1 jsme brali první hodnotu, která se na voltmetru objevila po zapojení spínače do polohy 2. Za hodnotu U_2 tu, která se tam objevila po ní, tj. po půl sekundě. Předtím jsme samozřejmě ověřili, že pokud voltmetr např. rychle připojíme (či odpojíme) na zdroj napětí, tak hned první hodnota, která se na něm objeví odpovídá vcelku přesně té, která se posléze ustálí. Odpor voltmetru je $R = 10$ M Ω (vyčteno z manuálu a přibližně přeměřeno). Několik měření je uvedeno v následující tabulce:

U_1 (V)	0,99	1,70	1,22	0,68	0,94	0,69	1,34	1,26
U_2 (V)	0,70	0,79	0,70	0,47	0,69	0,49	0,74	0,70
C (μ F)	0,14	0,07	0,09	0,14	0,16	0,15	0,08	0,09

Průměrně tedy $C = 0,11 \mu\text{F}$. Statistickou odchylku nemá smysl počítat, neboť systematická je mnohem větší. Jedná se spíše o řádový odhad měřené kapacity člověka než o její přesné měření.

Závěr a diskuze výsledků

Vybíjecí křivku kondenzátoru a tudíž i kapacitu bychom mohli určit mnohem přesněji při použití např. osciloskopu, na kterém by se křivka přímo zobrazila. Aby se kondenzátor vybíjel pomaleji, potřebovali bychom větší odpor, ten jsme ovšem k dispozici neměli. Navíc při pomalejším vybíjení by velkou chybu do měření vnášel fakt, že kondenzátor není ideální, resp. že desky nejsou ideálně odizolovány, a tedy se kondenzátor vybíjí i při nezapojeném voltmetru (náboj odeče podlahou do země).

Samotná kapacita člověka velmi závisí na tom, jak dobře je odizolován, jak stojí, na čem, v čem je oblečen atd.

Lenka Zdeborová
Lenka.Zdeborova@st.mff.cuni.cz

Úloha S . III ... sonda k Jupiteru (5 bodů, řešilo 15 studentů)

Uvažujme družici letící k Jupiteru kolmo na jeho dráhu. Její rychlost ve velké vzdálenosti od Jupitera je $v_0 = 10000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Družice proletí za Jupiterem, její minimální vzdálenost od jeho středu je přitom rovna trojnásobku Jupiterova poloměru. Určete výsledný směr a velikost rychlosti sondy.

Zadali autoři seriálu podle úlohy ze 30. IPhO v Itálii.

Využijeme-li poznatky ze seriálu, stane se z této na první pohled obtížné úlohy pouze geometrický problém. Víme, že v soustavě spojené s Jupiterem má sonda ve velké vzdálenosti rychlost $v = \sqrt{v_0^2 + v_J^2}$, kde v_J je oběžná rychlost Jupitera. Podle vztahu pro celkovou energii, která je ve velké vzdálenosti rovna pouze kinetické energii sondy, platí

$$\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GMm}{2a} \quad \Rightarrow \quad |a| = \frac{GM}{v^2} .$$

Z geometrie hyperboly plyne pro minimální vzdálenost R vztah $R = (\varepsilon - 1) |a|$ a pro úhel ϑ platí $\sin(\vartheta/2) = 1/\varepsilon$. Odtud snadno odvodíme

$$\vartheta = 2 \arcsin \frac{GM}{GM + Rv^2} .$$

Výpočtem ϑ je úloha téměř vyřešena a za správný postup jsme udělovali 3 body.

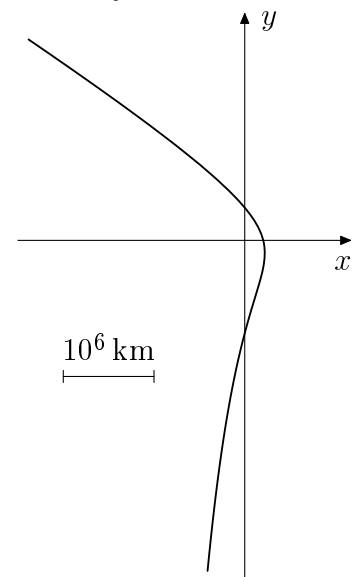
Zbývá provést přechod zpět do původní soustavy. Zvolíme např. následující konfiguraci: V původní soustavě se Jupiter pohybuje v záporném směru po ose x a sonda míří směrem vzhůru. V nové soustavě je vektor rychlosti sondy $\mathbf{v} = (v_J, v_0)$. Po průletu po hyperbole se velikost tohoto vektoru nezmění, pouze se vektor otočí o úhel ϑ v kladném smyslu.

Toto otočení nejsnáze provedeme tak, že si \mathbf{v} představíme jako komplexní číslo a násobíme jej výrazem $\cos \vartheta + i \sin \vartheta$ a výsledné komplexní číslo opět chápeme jako vektor. Lze to provést i jinak, např. přechodem do polárních souřadnic, ale tento způsob je asi nejrychlejší a navíc si nemusíme pamatovat žádné další vzorce. Výpočet je

$$(v_J + iv_0) (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = (v_J \cos \vartheta - v_0 \sin \vartheta) + i (v_0 \cos \vartheta + v_J \sin \vartheta) .$$

Výsledný vektor ještě převedeme do původní soustavy přičtením rychlosti Jupitera a dostáváme výslednou rychlost po průletu:

$$\mathbf{v}'_0 = (-v_0 \sin \vartheta - v_J (1 - \cos \vartheta), v_0 \cos \vartheta + v_J \sin \vartheta) .$$



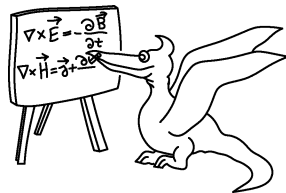
Obr. 5

Pro numerický výpočet jsme použili následující data: $v_J = 13,06 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, $v_0 = 10,00 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, $R = 214\,000 \text{ km}$ a $GM = 126\,900\,000 \text{ km}\cdot\text{s}^{-2}$. Postupně vychází $\varepsilon = 1,457$, $\vartheta = 86^\circ 42'$ a

$\mathbf{v}_0' = (-22, 29; 13,61) \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. Odtud už snadno spočteme velikost výsledné rychlosti $v_0' = 26,12 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ a úhel odklonu $\varphi = 58^\circ 35'$.

Poznámky k vašim řešením: Podle počtu řešitelů lze usuzovat, že úloha byla obtížná. Ti, kdo ji poslali, si s ní ovšem poradili dobře. Nejčastější chybou bylo řešení úlohy přímo v původní soustavě. To je problematické, neboť v této soustavě neplatí ZZE ve tvaru $E_{k, \text{sonda}} + E_p = \text{konst}$, ale musí se započítat i kinetická energie Jupitera. Navíc nelze použít geometrii popsanou v seriálu, neboť v této soustavě se sonda vůbec nepohybuje po hyperbole. Při čtení těchto řešení mě ale napadlo zjistit, jak vypadá trajektorie sondy v původní soustavě. Přestože závislost polohy sondy na čase nelze analyticky vyjádřit ani v soustavě spjaté s Jupiterem, v parametrickém tvaru lze (poněkud komplikovaným výpočtem) přesně zjistit tvar trajektorie. Tvar trajektorie pro naše konkrétní hodnoty vidíme na obr. 5. Je použita stejná konfigurace, jako v řešení, počátek má význam polohy Jupitera v okamžiku, kdy k němu je planeta nejbližší. Na první pohled je jasné, že trajektorie má k hyperbole hodně daleko. Výpočet jsem provedl v programu *Maple*, takže pokud si chcete dál hrát, napište mi email a já vám pošlu zdroják.

Honza Houštek
Jan.Houstek@st.cuni.cz



Seriál na pokračování

Kapitola 5: Inerciální a neinerciální systémy

Podle vašich četných přání zaměříme tento díl seriálu na popis pohybu v neinerciálních systémech.²⁾ Připomeňme si, že inerciální systém je takový souřadný systém, vůči němuž se každý volný hmotný bod³⁾ pohybuje rovnoměrně přímočaře. Možná vám to připomíná 1. Newtonův zákon. Skutečně, precizní formulace tohoto zákona je následující: *Existuje souřadný systém takový, že volný hmotný bod se v něm pohybuje rovnoměrně přímočaře.* 1.N.z. tedy říká pouze to, že existuje inerciální systém. V tomto systému pak platí 2.N.z. v obvyklém tvaru a při znalosti působících sil můžeme sestavit pohybovou rovnici.

Často ale potřebujeme popsat fyzikální děje i při pohledu z jiných než inerciálních systémů. Tyto systémy se nazývají neinerciální a vůči inerciálním konají zrychlený pohyb. Jistě, můžeme celý děj popsat z pohledu systému inerciálního a pak provést přechod do libovolného systému (to už je jen matematika a geometrie). Tento postup si můžete vyzkoušet při řešení úlohy seriálu. Často je takový postup příliš komplikovaný a je efektivnější hledat pohybovou rovnici přímo pro neinerciální systém.

Setrvačná síla

Nejprve označme \mathbf{F}_p sílu, která působí na hmotný bod v inerciálním systému. Může to být jedna z sil zmiňovaných v 1. dílu (gravitační, třecí apod.), reakce podložky nebo jiná, takzvaná *pravá* síla. V inerciálním systému platí $m\mathbf{a} = \mathbf{F}_p$, v neinerciálním však nikoliv. Představme si např. vlak, který se rozjíždí po rovných kolejích. Jirka, který na vlak přiběhl pozdě, už jen nehybně stojí na nástupišti. Při pohledu z vlaku se pohybuje zrychleným pohybem, přestože na něj ve vodorovném směru žádná pravá síla nepůsobí. Modifikujeme tedy pohybovou rovnici tak, že do ní přidáme formální člen \mathbf{F}_z nazývaný zdánlivá síla, $m\mathbf{a} = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_z$. V případě vlaku zřejmě stačí volit $\mathbf{F}_z = -m\mathbf{a}_v$, kde \mathbf{a}_v je zrychlení vlaku. S tímto členem bude pohybová rovnice „fungovat“ nejen pro nehybné předměty na nástupišti, ale pro libovolný pohyb konající tělesa, např. pro Káju mávajícího na Jirku z vlaku. Tako zdánlivá síla se nazývá setrvačná.

²⁾ Používá se i termín soustava.

³⁾ Hmotný bod, na který nepůsobí žádné vnější síly.

Je velmi důležité si uvědomit, že zdánlivé síly působí pouze v neinerciálním systému a jsou to skutečně „zdánlivé“ síly, které zavádíme proto, aby pohybová rovnice platila ve stejném tvaru jako v systémech inerciálních.

Odstředivá a Eulerova síla

V případě, že pohyb neinerciálního systému vůči inerciálnímu (dále jen pohyb systému) není přímořarý, je situace podobná. Představme si kolotoč rotující rovnoměrně úhlovou rychlostí ω . Dita sedící na kolotoči se v inerciálním systému pohybuje po kružnici o poloměru r a působí na ní tedy (pravá) odstředivá síla o velikosti $F_d = m\omega^2 r$. Při pohledu z kolotoče je však Dita v klidu, výsledná síla působící na ni v neinerciálním systému je tudíž nulová a proto musí na Ditu působit zdánlivá síla stejné velikosti a opačného směru než síla odstředivá. Tako síla je vám jistě dobře známá odstředivá síla \mathbf{F}_o .

Na čtenáři již necháme, aby si rozmyslel, že v případě nerovnoměrně rotujícího kolotoče musíme přidat zdánlivou Eulerovu sílu $\mathbf{F}_e = -m\boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r}$, kde $\boldsymbol{\epsilon}$ je úhlové zrychlení kolotoče. Zamysleme se ale, jak je to z pohledu kolotoče s Pavlem, který podobně jako Jirka zůstal stát u kolotoče. Nepůsobí na něj žádná pravá síla a v neinerciálním systému na něj tedy působí pouze odstředivá síla. Pavel se v tomto systému ale pohybuje rovnoměrně po kružnici což nesouhlasí s pohybovou rovnicí. Je tedy nutné přidat v pořadí již čtvrtou a také poslední zdánlivou sílu, sílu Coriolisovu.

Coriolisova síla

Nejprve rekapitujeme naše dosavadní výsledky. Vzhledem k tomu, že každý pohyb lze rozložit na translaci a rotaci kolem pevného bodu, bude v libovolném neinerciálním systému na hmotný bod působit zdánlivá síla $\mathbf{F}_z = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_o + \mathbf{F}_e$. Dosadíme-li do tohoto vzorce za jednotlivé složky zdánlivé síly, zjistíme, že můžeme psát $\mathbf{F}_z = -m\mathbf{a}_0$, kde \mathbf{a}_0 je okamžité zrychlení bodu X neinerciálního systému, ve kterém se nachází pozorovaný hmotný bod, při sledování z inerciálního systému. Pozor, je rozdíl mezi bodem X a pozorovaným hmotným bodem. X je pevný bod neinerciálního systému, pozorovaný hmotný bod se může vůči tomuto systému pohybovat. Přitom je zřejmé, že pro hmotný bod, který je vůči neinerciálnímu systému v klidu, platí pohybová rovnice $m\mathbf{a} = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_z$, v takovém případě je stejně jako u Dity na kolotoči $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{F}_z = -\mathbf{F}_p$.

Pro tělesa, která se v neinerciálním systému pohybují, ale pohybová rovnice v tomto tvaru neplatí. To je právě případ Pavla stojícího u kolotoče. Síla, která zaručí, že pohybová rovnice bude platit i pro tato tělesa, je již zmiňovaná zdánlivá síla Coriolisova, pro kterou dále v textu odvodíme vztah $\mathbf{F}_c = 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$, kde \mathbf{v} je rychlost hmotného bodu v neinerciálním systému a $\boldsymbol{\omega}$ je okamžitá úhlová rychlost rotace systému. Všimněme si, že v případě vlaku, kde je $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ je také $\mathbf{F}_c = 0$, proto jsme byli oprávněni tvrdit, že v takovém případě stačí pro libovolně se pohybující hmotný bod uvažovat pouze setrvačnou sílu. Zároveň snadno nahlédneme, že problém Pavla je zavedením \mathbf{F}_c vyřešen.

Coriolisova, která je důsledkem rotace Země, způsobuje řadu zajímavých jevů, od těch známých, jako je existence pasátů, přes stáčení roviny kmitů Foucaultova kyvadla až po takové kuriozity, jako nesymetrické vyjždění severojižních kolejí, po kterých jezdí velkou rychlostí vlaky stále ve stejném směru (u nás například koridorová dvoukolejná trať v úseku Brno – Česká Třebová).

Obecné odvození zdánlivých sil

V tomto odstavci provedeme obecné odvození vztahů pro zdánlivé síly. Vezměme inerciální systém a zvolme jeden jeho pevný bod O . Neinerciální systém, v němž budeme vyšetřovat zdánlivé síly, nevolíme úplně libovolně, ale tak, aby O byl i jeho pevný bod (zobecnění na libovolný systém se provede už pouze přidáním translace). Pohyb, který může tento systém konat, je vlastně pohyb tuhého tělesa upevněného v jednom bodě, a pro ten vždy existuje vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ zavedený v minulém dílu seriálu.

Označme nyní \mathbf{r} polohový vektor hmotného bodu vzhledem k bodu O a hledejme časové derivace tohoto vektoru. Derivace se ovšem liší při pozorování z inerciálního a neinerciálního systému (tělesa, která jsou v jednom systému v klidu se mohou v druhém pohybovat a naopak), označme proto svislou čarou za derivací a indexem i nebo n systém, ve kterém derivaci počítáme.

Pročteme-li pozorně minulý díl seriálu, snadno nahlédneme, že platí

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_i = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_n + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} . \quad (2)$$

Tento vztah platí nejen pro \mathbf{r} , ale pro libovolný vektor \mathbf{w} ,

$$\left. \frac{d\mathbf{w}}{dt} \right|_i = \left. \frac{d\mathbf{w}}{dt} \right|_n + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w} ,$$

dosadíme do tohoto vztahu $\mathbf{w} = (d\mathbf{r}/dt)|_i$,

$$\left. \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|_i = \left. \frac{d}{dt} \left(\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_i \right) \right|_n + \boldsymbol{\omega} \times \left(\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_i \right) .$$

Označíme nyní $\mathbf{v} = (d\mathbf{r}/dt)|_n$, $\mathbf{a} = (d\mathbf{v}/dt)|_n$ a $\boldsymbol{\epsilon} = d\boldsymbol{\omega}/dt$. Vektory \mathbf{v} a \mathbf{a} značí rychlost a zrychlení hmotného bodu v neinerciálním systému a vztah (2) lze psát ve tvaru $(d\mathbf{r}/dt)|_i = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Dosadíme tento výraz a chvíli upravujeme:

$$\left. \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|_i = \left. \frac{d}{dt} (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \right|_n + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \mathbf{a} + \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) .$$

Levá strana udává zrychlení hmotného bodu v inerciálním systému a je zřejmě rovna \mathbf{F}_p/m . Násobíme-li tedy celou rovnici hmotností a převedeme-li vše kromě $m\mathbf{a}$ na levou stranu, dostáváme

$$\mathbf{F}_p - m\boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r} + 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} + m\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) = m\mathbf{a} ,$$

což je hledaná pohybová rovnice v neinerciálním systému. Jednotlivé členy za \mathbf{F}_p mají po řadě význam \mathbf{F}_e , \mathbf{F}_c a \mathbf{F}_o (rozmyslete si zejména vztah pro odstředivou sílu).

Příklady řešené pomocí setrvačných sil

Příklad 11: K α -částici o hmotnosti $4m$ a náboji $2e$ se rychlostí v přibližuje proton o hmotnosti m a náboji e . Do jaké nejmenší vzdálenosti se proton přiblíží?

Úlohu vyřešíme v soustavě spojené s α -částicí. Označme F sílu, kterou na sebe částice podle Coulombova zákona působí. V inerciálním systému se tedy α -částice pohybuje se zrychlením $F/4m$. Na proton v neinerciální soustavě působí pravá síla F a setrvačná síla $m \cdot F/4m = F/4$. Obě síly míří od α -částice celý systém se jeví, jako kdyby soustava byla inerciální, ale α -částice měla náboj $5e/4$.

Nyní je již řešení jednoduché. Nejblíže bude proton v okamžiku, kdy je jeho kinetická energie nulová a veškerá celková energie je rovna energii potenciální, tedy

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{16\pi\epsilon} \frac{5e^2}{r_{\min}} \quad \Rightarrow \quad r_{\min} = \frac{5e^2}{8\pi\epsilon mv^2} .$$

Příklad 12 (zploštění Země): Zjistěte, jak moc je Země zploštělá v důsledku vlastní rotace.

Úlohu vyřešíme v soustavě spojené s rotující Zemí. Předpokládáme, že v této soustavě jsou všechny její části v klidu a že rotuje rovnoměrně, a tak musíme ze zdánlivých sil uvažovat pouze sílu odstředivou. Označme R polární poloměr Země. A zvolme v tomto bodě nulovou hladinu gravitační potenciální energie. Půjdeme-li nyní po ustáleném povrchu na rovník, který je od středu vzdálen $R + h$, musí se zvýšení potenciální energie o mgh rovnat práci odstředivých sil, protože my sami při chůzi po ustáleném povrchu práci nekonáme. Odstředivá síla ve vzdálenosti r od osy je rovna $F_o = m\omega^2 r$ a platí tedy

$$mgh = \int_0^R m\omega^2 r \, dr = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\omega^2 r^2}{2g} .$$

Dosadíte-li do tohoto vztahu a porovnáte výsledek se skutečným měřením, zjistíte, že zploštění Země je o něco větší, než by podle našeho výpočtu mělo být. Země totiž v důsledku působení slapových sil zpomaluje svou rotaci a tak se zploštění postupně snižuje. Díky značné viskozitě ale změna vykazuje jisté zpoždění a tak v současnosti tvar Země odpovídá rotaci, kterou měla před přibližně 10 mil. let.

Příklad 13 (volný pád): Spočtete, o kolik se při volném pádu odchýlí těleso ve vodorovném směru v důsledku působení Coriolisovy síly.

Tato úloha byla řešena z pohledu inerciální i neinerciální soustavy v minulém ročníku Fykosu. Zde ji proto vyřešíme pouze rychle z pohledu systému neinerciálního. Coriolisova síla vychylující těleso při pádu mu uděluje ve východním směru zrychlení o velikosti $a = 2\omega v \cos \varphi$, kde φ je zeměpisná šířka. Dosadíme-li $v = gt$ a dvakrát integrujeme, dostáváme pro posunutí $d = (1/3)\omega gt^3 \cos \varphi$.

Poznamenejme, že v dobách antického Řecka byl jedním z největších protiargumentů rotace Země fakt, že při upuštění tělesa se pod ním Země „nepootočí“ o stovky metrů a těleso neletí na západ. Správným důsledkem rotace je přitom velmi nepatrné posunutí na východ, které bylo ve 20. století dokonce experimentálně měřeno.

Příklad 14 (Foucaultovo kyvadlo): Zjistete, jak rychle se v závislosti na zeměpisné šířce stáčí rovina kmitů matematického kyvadla.

Tento příklad bude závěrem tohoto dílu seriálu a ukážeme na něm, jak výhodné je pozorovat stejný děj z různých soustav. Jak plyne ze zadání, Foucaultovo kyvadlo není žádný tajemný přístroj, který najdeme jen ve fyzikální laboratoři, ale naprosto obyčejné kyvadlo kývající ovšem na rotující zeměkouli. Kýve-li takovéto kyvadlo na pólu, nemá v inerciální soustavě důvod měnit rovinu kmitů. Při pohledu ze Země se proto tato rovina stáčí rychlostí otáčka za den. Nevisí-li kyvadlo na pólu, dochází k podobnému jevu, ale jeho zdůvodnění už není tak snadné.

Nyní máme 2 možnosti: Jednak řešit v inerciálním systému pohyb kyvadla v radiálním poli, jehož bod uchycení rotuje konstantní úhlovou rychlostí kolem pevné osy, nebo provést přechod do systému neinerciálního a řešit pohyb pevně uchyceného kyvadla pod vlivem zdánlivých sil. První možnost je nesrovnatelně složitější jak pro výpočet, tak pro následnou interpretaci výsledků a volíme proto druhý způsob.

Na hmotný bod kyvadla působí tyto síly: gravitační síla \mathbf{F}_g , síla vlákna \mathbf{F} , odstředivá síla \mathbf{F}_o a Coriolisova síla \mathbf{F}_c . Výslednici $\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_o = \mathbf{F}_G$ (tíhovou sílu) lze v daném místě považovat za konstantní. Úhlovou rychlost rotace Země nyní rozložíme do směru tíhové síly $\boldsymbol{\omega}_n$ a směru kolmého na tuto sílu $\boldsymbol{\omega}_t$. Pro Coriolisovu sílu pak lze psát $\mathbf{F}_c = \mathbf{F}_{ct} + \mathbf{F}_{cn}$, kde $\mathbf{F}_{ct} = 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}_n$ a $\mathbf{F}_{cn} = 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}_t$. Protože $\mathbf{v} \perp \mathbf{F}_G$, je $\mathbf{F}_{ct} \perp \mathbf{F}_G$ a $\mathbf{F}_{cn} \parallel \mathbf{F}_G$. \mathbf{F}_{cn} lze zřejmě vůči \mathbf{F}_G zanedbat.

Protože očekáváme stáčení roviny kmitů, zkusíme přejít do další soustavy, která určitou rychlostí rotuje kolem svislé osy, a ve které vymizí síla \mathbf{F}_{ct} stáčeující rovinu kmitů. Rychlost rotace této soustavy pak bude hledanou rychlostí stáčení kmitů.

Takovou vlastnost má rychlost $-\boldsymbol{\omega}_n$. Přechodem do soustavy rotující touto rychlostí přibude odstředivá a Coriolisova síla. Odstředivá síla $\mathbf{F}'_o = m\omega_n^2 \mathbf{r}$ (\mathbf{r} značí vychýlení konce kyvadla z rovnovážné polohy) má stejný směr jako výslednice \mathbf{F}_G a \mathbf{F} a je vzhledem k ní zanedbatelná. Coriolisova síla je $\mathbf{F}'_c = -2m\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}_n = -2m(\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\omega}_n = -\mathbf{F}_{ct} - 2\mathbf{F}'_o$, z čehož je vidět, že výslednice sil \mathbf{F}_{ct} , \mathbf{F}'_c je $-2m\omega_n^2 \mathbf{r}$ a stejně jako \mathbf{F}'_o ji lze zanedbat. Jediné nezanedbatelné síly, které v nové soustavě na kyvadlo působí, jsou tedy \mathbf{F}_G a \mathbf{F} , kyvadlo zde kýve jako v inerciální soustavě a nestáčí rovinu kmitů.

Rychlost stáčení roviny kmitů Foucaultova kyvadla vůči povrchu Země je tedy $\omega_f = \omega \sin \varphi$, kde ω je úhlová rychlost rotace Země.

Úloha V. S ... kolotoč

a) Mojmír a Anežka sedí přesně proti sobě na točícím se kolotoči. Ještě je sníh a tak si Mojmír připravil sněhovou kouli a na kolotoči ji chce hodit po Anežce. Poradte mu, jakou rychlostí a jakým směrem (vzhledem ke kolotoči) má kouli hodit, aby Anežku zasáhl. Údaje jsou: vzdálenost obou od osy $R = 3\text{ m}$, úhlová rychlost kolotoče $\omega = 10\text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

Pozn.: Úlohu řešte v inerciální soustavě a předpokládejte, že Mojmír je schopný vrhnout kouli dostatečně rychle ve vodorovném směru. Lze tedy předpokládat pohyb koule po vodorovné přímce. Úloha nemá samozřejmě jednoznačné řešení, pokuste se najít nějaké reálné (odhadněte, jakou asi rychlostí se hází sněhové koule).

b) Načrtněte, narýsujte, odhadněte, vypočtěte, nasimulujte nebo nějak jinak zjistěte, jak bude v případě vašeho řešení části a) vypadat trajektorie koule v soustavě spojené s kolotočem a v nějakém bodě načrtněte zdánlivé síly, které na kouli působí.

c) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou nepravdivá, a proč?

1. Z pohledu inerciální soustavy působí na rotující hmotný bod odstředivá síla, která vyrovnává dostředivou sílu, a proto se hmotný bod pohybuje rovnoměrně.
2. Odstředivá síla je reakcí na dostředivou sílu, neboť má stejnou velikost a opačný směr.
3. Když v inerciálním systému náhle přestane na rovnoměrně rotující těleso působit dostředivá síla, bude těleso pokračovat v pohybu po tečné přímce. Z pohledu neinerciálního systému se bude v důsledku působení odstředivé síly pohybovat po radiální přímce.

d) Nezapoměňte posílat návrhy na poslední díl seriálu!

Upozornění:

Všechna jména v tomto textu jsou smyšlená a jakákoliv shoda s vaším jménem je čistě náhodná.

Naše adresa:

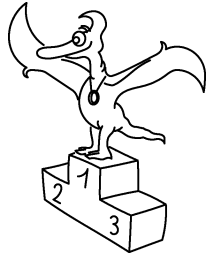
FYKOS

Matematicko-fyzikální fakulta UK — ÚTF

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

<http://fykos.mff.cuni.cz>



Pořadí řešitelů po III. sérii



Kategorie čtvrtých ročníků

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	5	6	S3	III	%	Σ
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	5	4	4	4	3	8	5	33	100	100
1	Jan	Kunc	4.A	G Kolín	0	4	4	4	3	3	5	23	70	75
2	Peter	Čendula	4.B	G Liptovský Mikuláš	5	4	6	4	0	—	6	25	100	69
3	Martin	Beránek		G Praha - Ohradní	5	2	3	—	3	—	5	18	86	55
4	Vladimír	Fuka	sept. A	G Rakovník	—	—	3	3	3	—	—	9	82	47
5	Zoltán	Mics	4.B	G Šahy	5	4	3	—	—	—	5	17	94	36
6	Juraj	Feilhauer	B	G Bratislava	0	1	4	2	1	0	0	8	24	34
7	Jan	Kratochvíl	4.K	SPŠST Praha - Panská	4	—	4	—	—	—	—	8	89	32
8	Pavol	Mikčo	4.B	G Stropkov	0	4	4	—	—	—	—	8	62	31
9	Karel	Židek	4.E	G Opava	—	—	—	—	—	—	—	0	—	29
10	Miroslav	Kozel			0	1	1	3	0	—	—	5	25	28
11 - 12	František	Havlůj		G Praha	—	—	—	—	—	—	—	0	—	23
11 - 12	Peter	Valachovič	4.B	SPŠ Trenčín	—	—	3	—	0	3	—	6	40	23
13 - 14	Nina	Benešová		G Praha	—	—	—	—	3	—	—	3	100	22
13 - 14	Martin	Sikora		G Bílovec	—	—	3	—	0	—	—	3	43	22
15 - 18	Zdeněk	Cejnar	4.A	G Říčany	0	—	4	—	—	—	—	4	44	21
15 - 18	Patrik	Hudec	4.C	G Bílovec	—	—	2	—	0	—	—	2	29	21
15 - 18	Jakub	Levic	sept. B	G Louny	—	—	—	—	—	—	—	0	—	21
15 - 18	Jaroslav	Tykal	4.C	G Jihlava	—	—	—	—	—	—	—	0	—	21
19	Ondřej	Plašil	okt. B	G Praha - Chodovická	—	—	—	—	—	—	—	0	—	19
20	Ladislav	Benda		GJKT	—	—	—	—	—	—	—	0	—	17
21 - 24	Petra	Adamová	4.A	G Benešov	—	1	—	2	—	—	—	3	38	16
21 - 24	Dáša	Eisenmann.	4.A	G Praha - Mezi šk.	—	—	3	—	3	—	—	6	86	16
21 - 24	Jaromír	Chalupský	sept. A	G Sušice	—	—	—	—	—	—	—	0	—	16
21 - 24	Lukáš	Sobek			—	—	2	2	1	—	—	5	45	16
25 - 26	Jan	Bauer	sept. A	G Praha - Sladk.	—	—	1	—	1	—	—	2	29	13
25 - 26	Petra	Dobroucká	7.BV.	G Moravská Třebová	0	—	3	—	3	—	—	6	50	13
27	Pavel	Řezanka	4.C	G Praha - Zborovská	—	—	2	—	—	—	—	2	50	12
28 - 31	Jan	Alster	sept. A	G Holešov	—	—	—	—	—	—	—	0	—	11
28 - 31	Pavel	Hančar		SPŠ Jičín	—	—	3	—	—	—	—	3	75	11
28 - 31	Martin	Holík	4.C	G Bílovec	—	—	—	—	—	—	—	0	—	11
28 - 31	Pavel	Janda	sept.	G Telč	—	—	—	—	—	—	—	0	—	11
32 - 34	Michal	Bláha	4.M	SPŠST Praha - Pan.	—	—	—	—	—	—	—	0	—	10
32 - 34	Jaroslava	Plasová	okt. C	G Klatovy	—	—	2	—	—	—	—	2	50	10
32 - 34	Ondřej	Schmid			—	—	—	—	—	—	—	0	—	10
35	Ivan	Dovica		G Košice	—	—	—	—	—	—	—	0	—	9
36 - 40	Martin	Jakl	6.D	G Pardubice	—	—	—	—	—	—	—	0	—	8
36 - 40	Tomáš	Leško			0	—	3	—	1	—	—	4	33	8
36 - 40	Martin	Szablatura		SPŠ Karviná	—	—	3	—	1	1	—	5	33	8
36 - 40	Martin	Šimek	sexta	G Telč	—	—	—	—	—	—	—	0	—	8
36 - 40	Vojtěch	Uhlíř		G Uherské Hradiště	—	—	—	—	—	—	—	0	—	8
41 - 43	Ivan	Banas	4.G	G Martin	—	—	—	—	—	—	—	0	—	7
41 - 43	Pavel	Kočica	4.A	G Uh. Brod	—	—	—	—	—	—	—	0	—	7
41 - 43	Michal	Tarana		G Žilina	—	—	—	—	—	—	—	0	—	7
44 - 45	Martin	Hrba	sept. A	G Sušice	—	—	—	—	—	—	—	0	—	5
44 - 45	Alice	Koželuhová		G Brno	—	—	—	—	—	—	—	0	—	5
46 - 49	Petr	Křemář		GT MPL Rožnov	—	—	—	—	—	—	—	0	—	4

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	5	6	S3	III	%	Σ
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	<i>5</i>	<i>4</i>	<i>4</i>	<i>4</i>	<i>3</i>	<i>8</i>	<i>5</i>	<i>33</i>	<i>100</i>	<i>100</i>
46 - 49	Michal	Nejezchleb		G Rožnov pod Rad.	—	—	—	—	—	—	—	0	—	4
46 - 49	Michal	Talík		G Broumov	—	—	—	—	—	—	—	0	—	4
46 - 49	Lukáš	Voleský			—	—	—	0	0	2	—	2	13	4
50 - 52	Ludek	Michera		G Rychnov n. K.	—	—	—	—	—	—	—	0	—	3
50 - 52	Martin	Pavel	4.A	G Dobruška	—	—	3	—	—	—	—	3	75	3
50 - 52	Lukáš	Schmiedt	4.D	SG Olomouc	—	—	—	—	—	—	—	0	—	3
53 - 56	Tomáš	Michalička		GOA Jaroměř	—	—	—	—	—	—	—	0	—	1
53 - 56	Jakub	Šrom			—	—	—	—	1	—	—	1	33	1
53 - 56	Leoš	Veselý			—	—	—	—	—	—	—	0	—	1
53 - 56	Pavel	Vraspír	sexta	G Polička	—	—	—	—	—	—	—	0	—	1

Kategorie třetích ročníků

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	5	6	S3	III	%	Σ
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	<i>5</i>	<i>4</i>	<i>4</i>	<i>4</i>	<i>3</i>	<i>8</i>	<i>5</i>	<i>33</i>	<i>100</i>	<i>100</i>
1	Eva	Skopalová		G Poprad	4	4	4	—	3	1	6	22	76	66
2	Ľuboš	Bednárík	3.F	G Trenčín	—	—	3	—	4	3	—	10	67	44
3 - 4	Michal	Hajn		G Jihlava	0	—	4	—	—	6	—	10	59	43
3 - 4	Michael	Komm	sept.	G Praha - Parlérova	—	—	—	—	—	—	—	0	—	43
5	Matej	Dubový	3.B	G Trenčín	—	—	3	—	3	3	—	9	60	40
6 - 7	Václav	Matouš	3.A	G Klatovy	—	—	4	—	0	—	—	4	57	34
6 - 7	Miroslav	Šulc	sexta B	G Ústí n. L. - Stavbařů	0	1	3	—	4	3	3	14	48	34
8 - 9	Jakub	Galgonek		GPB Frýdek-Místek	—	—	4	—	—	—	—	4	100	30
8 - 9	Ondřej	Vencálek	3.B	G Frýdek-Místek	—	—	4	—	2	—	—	6	86	30
10 - 12	Tomáš	Buchta		G Praha-Zborovská	0	—	—	3	—	0	0	3	14	29
10 - 12	Zdeněk	Čejka		G Praha - U Lib. Zám.	—	—	4	2	—	—	—	6	75	29
10 - 12	Miroslav	Frost	sept. A	G Brno - Elgartova	4	—	3	—	2	—	—	9	75	29
13	Iva	Kouřilová	3.B	OA Blansko	0	1	—	—	4	—	2	7	41	25
14	Jiří	Kosina	sexta	G Blansko	0	—	3	—	3	—	—	6	50	23
15	Jan	Fröhlich	7.A	G Praha - Mezi šk.	—	—	—	—	—	—	—	0	—	22
16	Jaroslava	Schovancová		G Praha	—	—	—	—	—	—	—	0	—	18
17 - 18	Miroslav	Krús	3.A	G Klatovy	—	—	4	—	—	—	—	4	100	13
17 - 18	Jiří	Palek	3.A	G Nové Strašecí	—	—	—	—	—	—	—	0	—	13
19 - 21	Lenka	Beranová	sept. C	G Klatovy	—	—	—	—	—	—	—	0	—	12
19 - 21	Pavel	Kwicien	3.A	G Dvůr Králové	—	—	—	—	—	—	—	0	—	12
19 - 21	Jindřich	Štáštka	3.E	G Sokolov	0	—	2	—	0	—	—	2	17	12
22 - 24	Jiří	Eliášek	3.B	G Trutnov	0	—	3	—	—	—	—	3	33	11
22 - 24	Milan	Jalový	sexta A	G Blansko	—	—	—	—	3	—	—	3	100	11
22 - 24	Jakub	Kratochvíl		G Čáslav	—	—	—	—	—	—	—	0	—	11
25 - 26	Václav	Bouše	3.A	G Praha - Mezi šk.	—	—	—	—	—	—	—	0	—	10
25 - 26	Jana	Nováková	3.A	G Žďár n. Sázavou	—	—	—	—	—	—	—	0	—	10
27 - 28	Karol	Martinka	3.G	G Trenčín	—	—	—	—	—	—	—	0	—	8
27 - 28	David	Šubrt		G Děčín	—	—	—	—	3	—	—	3	100	8
29 - 31	Miroslav	Kačena	sept.	G Trenčín	—	—	—	—	—	—	—	0	—	7
29 - 31	Zuzana	Svobodová		G Zlaté Moravce	0	—	2	—	1	—	—	3	25	7
29 - 31	Michal	Zapletal	P2C	G Rožnov pod Rad.	—	—	1	1	—	—	—	2	25	7
32 - 34	Matěj	Görner		G Praha	—	—	—	—	—	—	—	0	—	6
32 - 34	Zdenka	Marková	3.A	G Holešov	—	—	—	—	—	—	—	0	—	6
32 - 34	Karel	Martíšek	sexta A	G Brno - Elgartova	—	—	—	—	—	—	—	0	—	6
35	Michal	Kabát	3.A	G Púchov	1	—	1	0	1	—	—	3	19	5
36 - 37	Anna	Fučíková		G Třebíč	—	—	0	—	1	—	—	1	14	3
36 - 37	Ondřej	Srba	3.B	G Příbor	—	—	3	—	0	—	—	3	43	3
38	Petr	Čech	3.A	G Přerov	—	—	—	—	—	—	—	0	—	2
39	David	Herčík		G Liberec	—	—	—	—	—	—	—	0	—	1

Kategorie druhých ročníků

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	5	6	S3	III	%	Σ
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	5	4	4	4	3	8	5	33	100	100
1	Miroslav	Hejna	6A8	G Rychnov n. K.	5	3	4	4	—	2	6	24	80	82
2	Lukáš	Chvátal	6A8.	G Brno - Vejrostova	5	—	5	—	—	—	5	15	107	50
3 - 4	Václav	Cviček	2.A	G Frýdek-Místek	0	4	4	—	3	—	—	11	69	45
3 - 4	Luboš	Matásek	sexta A	G Plzeň - Mikuláš. n.	—	—	3	1	1	3	—	8	42	45
5	Michal	Bareš	sexta A	G Plzeň - Mikuláš. n.	1	—	3	—	2	4	—	10	50	43
6 - 7	Jan	Prachař		G Rychnov n. K.	0	—	4	3	1	—	—	8	50	38
6 - 7	Tibor	Vansa		G Moravská Ostrava	4	3	2	1	1	2	3	16	48	38
8 - 9	Jaroslav	Trnka	2.B	G Praha	0	—	4	—	0	3	3	10	40	35
8 - 9	Karel	Tůma	sexta A	G Moravská Ostrava	0	—	3	—	3	—	—	6	50	35
10	Petr	Šimek	2.A	G Blansko	—	—	2	4	—	—	—	6	75	34
11	Vít	Šípál	2.B	G Ústí n. L. - Jateční	—	—	3	—	2	—	—	5	71	23
12	Marek	Vyšínka	6 AV.	G Brno	—	—	—	—	—	—	—	0	—	18
13	Miroslav	Havelka		G Zastávka	0	—	3	—	—	—	—	3	33	16
14 - 16	Pavel	Čížek	sexta	G Kralupy n. Vl.	0	—	3	—	3	—	—	6	50	15
14 - 16	Barbora	Galaczková	2.B	G Třinec	—	1	—	1	—	—	—	2	25	15
14 - 16	Václav	Varvařovský	kvinta A	G Plzeň - Mikuláš. n.	—	—	—	—	—	—	—	0	—	15
17 - 18	Jaroslav	Kudlička	sexta A	G Hodonín	—	—	—	—	—	—	—	0	—	13
17 - 18	Bára	Vostracká	sexta		—	—	3	—	—	3	—	6	50	13
19	Šárka	Kreuzová	sexta		—	—	3	—	—	3	—	6	50	12
20 - 21	Jan	Kluson	sexta	G Litomyšl	—	—	—	1	—	—	—	1	25	11
20 - 21	Petr	Pošta		G Pardubice	—	—	—	—	—	—	—	0	—	11
22	Markéta	Růžičková	2.A	G Cheb	—	—	3	—	—	—	—	3	75	10
23	Petr	Gibas	A	G Praha - Zborovská	—	—	3	—	—	—	—	3	75	9
24 - 25	Zuzana	Kopová		G Pardubice	—	—	2	—	2	—	—	4	57	8
24 - 25	Miroslav	Zgažar		SPŠCH Ostrava	—	—	—	—	—	—	—	0	—	8
26	Jan	Šmrek		G Bratislava	—	—	—	—	—	—	—	0	—	7
27	Jaroslav	Štencl	B		—	—	—	—	—	—	—	0	—	6
28 - 31	Stanislav	Mlenský	2.B	COP Hronov	—	—	—	—	—	—	—	0	—	5
28 - 31	Lenka	Pinkavová	sept.	G České Budějovice	—	—	2	—	—	—	—	2	50	5
28 - 31	Lukáš	Snášel	2.B	COP Hronov	—	0	1	—	—	—	—	1	13	5
28 - 31	Zdeněk	Štupňánek		G Znojmo	—	0	—	—	0	—	—	0	0	5
32	Jan	Křivka	2.B	COP Hronov	—	0	1	—	—	—	—	1	13	4
33	Ondřej	Klučka		G Bratislava	—	—	—	—	—	—	—	0	—	3
34 - 35	Jitka	Bačová		G Olomouc	—	—	—	—	—	—	—	0	—	2
34 - 35	Tereza	Cvejnová		G Písek	—	—	—	—	—	—	—	0	—	2
36	Pavel	Klouda		G Kyjov	—	—	—	—	0	—	—	0	0	1

Kategorie prvních ročníků

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	5	6	S3	III	%	Σ
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	5	4	4	4	3	8	5	33	100	100
1	Petr	Houštěk	kvarta	G Pelhřimov	—	4	4	—	3	7	6	24	100	55
2	Alexadr	Kazda		G Praha	5	—	4	—	—	—	3	12	86	40
3	Martin	Váňa	1.D	SPSŠ Praha	—	—	—	—	—	—	—	0	—	12
4	Jan	Kuchař		GJKT	—	—	—	—	—	—	—	0	—	11
5	Michal	Havel		COP Hronov	—	—	1	—	3	—	—	4	57	10
6 - 8	Hana	Suhomeřová	9.A	ZŠ Trenčín	—	—	—	—	3	—	—	3	100	9
6 - 8	Mária	Šedivá	1.A	ZŠ Trenčín	—	—	—	—	3	—	—	3	100	9
6 - 8	Lucie	Vasická		G Most	—	—	—	—	—	—	—	0	—	9
9 - 11	Jana	Babováková		G Most	—	—	—	—	—	—	—	0	—	5
9 - 11	Miroslav	Frantes		G Benešov	—	—	—	—	—	—	—	0	—	5
9 - 11	Přemysl	Rubeš		G Pardubice	—	—	—	—	—	—	—	0	—	5
12 - 14	Filip	Kozel	1.A	COP Hronov	—	—	—	—	—	—	—	0	—	3
12 - 14	Jan	Křetínský		G Brno	—	—	—	3	—	—	—	3	75	3
12 - 14	Jana	Vrábelová			—	—	—	—	—	—	—	0	—	3
15	Markéta	Novotná		G Hranice	0	—	1	—	—	—	—	1	11	2
16	Zdeněk	Váňa	1.B	COP Hronov	—	—	—	—	—	—	—	0	—	1

Fyzikální korespondenční seminář, který je zastřešen Oddělením vnějších vztahů a propagace MFF UK, je organizován studenty MFF UK za podpory Ústavu teoretické fyziky MFF UK a jeho zaměstnanců a Jednoty českých matematiků a fyziků.