13. ročník, úloha II . S ... *vodivost polovodičů* *(5 bodů; průměr ?; řešilo 23 studentů)*

a) *Kolik elektronů je ve vodivostním pásu ($E \geq 0$) nepříměsového polovodiče se šířkou zakázaného pásu 0,6 eV?*
b) *V příkladu byla ilustrována závislost vodivosti polovodiče s donorovou příměsí na teplotě. Jak se bude chovat polovodič s akceptorovou příměsí?*
c) *Je-li v čase $t = 0$ excitováno $n_e(0)$ elektronů do vodivostního pásu, bude jejich počet klesat exponenciálně, konkrétně bude platit $n_e(t) = n_e(0) \exp(-t/\tau_e)$. Když budeme excitovat od okamžiku $t = 0$ za jednotku času c_e elektronů, tvrdili jsme, že se počet elektronů ve vodivostním pásu změní o hodnotu $c_e \tau_e$ (viz vztah 1 v druhém díle seriálu). Na vás je, abyste tento vztah dokázali.*

Fermi-Diracovo rozdělení

Původním smyslem úlohy bylo ukázat platnost vztahu z prvního dílu seriálu, a to, že počet elektronů ve vodivostním pásu je úměrný $\exp(E_g/kT)$, případně dopočítat konstantu úměrnosti. Toto řešení je ovšem možné pouze za užití integrálního počtu. Proto jsme body udělili, pokud řešitel přišel na to, že se musí cosi integrovat nebo sčítat. Zádrhel je právě v tom, že Fermi-Diracovo rozdělení udává počet elektronů s enegií právě E, to znamená, že musíme pro získání počtu elektronů s energií větší než je energie dna vodivostního pásu sčítat přes všechny energie větší než nula. Počet všech elektronů v polovodiči nechť je n_0 a počet elektronů s energií větší než E_L nechť je $n(E_L)$. Potom můžeme psát

$$n(E_L) = \frac{n_0}{N} \sum_{E=E_L}^{\infty} f_{FD}(E)\,,$$

kde sčítáme přes všechny energetické hladiny (jsou kvazispojité). N je normovací konstanta. Je zřejmé, že pro E_L rovno nejnižší energii elektronů v polovodiči započteme do sumy všechny elektrony proto $n(E_L) = n_0$. Významem a velikostí normovací konstanty se nebudeme zabývat, pro její přesné určení bychom museli užít kvantovou mechaniku. Sice bychom správně měli určit, kde leží Fermiho hladina, v pozdější integraci se stejně její posuv neprojeví, proto položme E_F rovno 0. Sumu v předchozím vztahu nahradíme integrálem, protože energetické hladiny jsou kvazispojité a tudíž dostatečně husté. Potřebujeme spočítat

$$n = \frac{n_0}{N} \int_{E_g/2}^{\infty} \frac{\mathrm{d}E}{\exp[(E - E_g/2)/kT] + 1}\,.$$

Výpočet tohoto integrálu dává přibližně $(2kTn_0/N) \exp(E_g/kT)$, pokud ovšem jednička ve jmenovateli není oproti exponenciále zanedbatelná. Před exponenciálou je sice lineární člen v T, termodynamická teplota je ale obsažena i v normovací konstantě, proto výsledek bude záviset na E_g a T tak, jak bylo popsáno v prvním dílu seriálu. Podívejme se na trochu jednodušší případ, kdy $E_g/2 > kT$, ze kterého vyplyne podstatné omezení exponenciálního vztahu. Potom můžeme jedničku ve jmenovateli zanedbat a integrujeme funkci $\exp[-(E - E_g/2)/kT]$, takže nakonec pro nízké teploty dostaneme $(kTn_0/N) \exp(E_g/2kT)$. Zde vidíme i meze, kdy přibližný vztah platí — pouze pro vysoké teploty.

Akceptorová příměs

Na začátek bychom se chtěli omluvit za dvě chyby, které mohly vést k nepochopení úlohy. V textu ilustrativního příkladu v druhém dílu seriálu bylo uvedeno, že se jedná o polovodič typu p, pochopitelně donor je typu n. Potom v popisce grafu je u měrného elektrického odporu ϱ uvedena špatně jednotka $\Omega{\cdot}\mathrm{cm}$, má být $\Omega{\cdot}\mathrm{cm}^{-1}$.

V textu byla řeč o vodivosti, kterou jsme zaváděli v prvním dílu seriálu. Ta je nepřímo úměrná měrnému odporu. Ještě je nutné uvědomit si, že graf měl na ose x veličinu $1/T$ a na ose y v logaritmickém měřítku měrný odpor. Logaritmické měřítko je výhodné v tom, že exponenciály jsou v grafu přímky. Proto při vysokých i nízkých teplotách je v grafu úsečka, platí tedy exponenciální vztahy pro počet elektronů ve vodivostním pásu.

Jak tedy vypadá graf pro akceptory? Průběh bude podobný, nikoliv však stejný. Nejdříve se na vodivosti podílejí díry vzniklé přechodem elaktronů z valenčního pásu na hladinu příměsi — děrová vodivost. Po nasycení koncentrace děr vodivost klesá díky srážkám děr s tepelnými kmity mříže (jsou to kvazičástice, mohou interagovat s jinými kvazičásticemi i částicemi a tím se brzdit). Po dalším zvýšení teploty se excitují elektrony do vodivostního pásu a vznikají další díry. Potom vedou díry i elektrony. Uváděli jsme vztah pro vodivost polovodiče — je součtem elektronové a děrové vodivosti, ve kterých vystupuje počet nosičů náboje a jejich pohyblivost. Pohyblivost elektronů a děr není stejná a závisí na teplotě — díky tomu se grafy pro akceptor a donor budou lišit.

Fotoexcitace

Předpokládejme, že vztah platí a ukažme, že po určitém časovém okamžiku se počet elektronů nezmění. Za čas Δt ubyde $c_e\tau_e[1-\exp(-\Delta t/\tau_e)]$ elektronů a excituje se $c_e\Delta t$ elektronů. Potom jistě musí platit rovnice

$$1-\exp\frac{-\Delta t}{\tau_e}=\frac{\Delta t}{\tau_e}\,.$$

Platnost této rovnice chceme dokázat pro $\Delta t\to 0$. Matematicky zapsáno

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}=1\,,$$

což je snadné cvičení. Ti, kteří limitu neumějí ještě spočítat, mohou platnost ověřit na kalkulačce. Skutečně při zmenšování x např. na 10^{-6} dostaneme kýžený výsledek.

Tomáš Ostatnický

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.