13. ročník, úloha I.4 ... moře *(4 body; průměr ?; řešilo 92 studentů)*

Planeta o poloměru $R = 6400$ km je obklopena $H = 10$ km hlubokým mořem o hustotě $\varrho = 1000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Měřením bylo zjištěno, že při ponořování tělesa do moře se nemění gravitační síla na něj působící. Máte-li zadánu gravitační konstantu $\varkappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$, spočtěte gravitační zrychlení u povrchu planety.

Na začátku bychom se chtěli omluvit za „chybné“ zadání této úlohy. Chybné v uvozovkách, protože pozměněné zadání má taky řešení. Na to přišli ale jenom čtyři řešitelé. Chyba byla v tom, že těleso jsme *ponořovali*, a měli jsme ho jenom *ponořit*.

Podívejme se nejdříve, jak to bude vypadat, když těleso do vody *ponoříme*. Pro gravitační zrychlení na povrchu planety platí

$$g(R) = g(R+H) \quad \Rightarrow \quad \frac{\varkappa\frac{4}{3}\pi\varrho_{\mathrm{pl}}R^3}{R^2} = \frac{\varkappa\left[\frac{4}{3}\pi R^3\left(\varrho_{\mathrm{pl}} - \varrho\right) + \frac{4}{3}\pi\left(R+H\right)^3\varrho\right]}{\left(R+H\right)^2}\,. \tag{1}$$

Odtud dostaneme vztah pro hustotu planety

$$\varrho_{\mathrm{pl}} = \varrho\frac{\left(R+H\right)^3 - R^3}{R\left(R+H\right)^2 - R^3}\,.$$

Dosazením do (1) dostaneme rovnici

$$g = \frac{4}{3}\pi\varkappa\varrho\frac{\left(R+H\right)^3 - R^3}{\left(R+H\right)^2 - R^2} = \frac{4}{3}\pi\varkappa\varrho\frac{3R^2 + 3RH + H^2}{2R+H}\,.$$

Podle zadání $R \gg H$, proto můžeme členy $3RH + H^2$ vůči $3R^2$ zanedbat, stejně jako H vůči $2R$. Potom platí

$$g \approx 2\pi\varkappa\varrho R = 2{,}68\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

Někteří z vás psali výsledek na osm i deset platných číslic. Je to zbytečné, protože $\varkappa$ známe s přesností na tři platné číslice a výsledek určitě nemůžeme znát přesněji.

Jak to bude vypadat, když budeme těleso do vody *ponořovat*? Musí platit

$$g = \frac{\frac{4}{3}\varkappa\pi\left[R^3\left(\varrho_{pl} - \varrho\right) + \varrho\left(R+h\right)^3\right]}{\left(R+h\right)^2} = \mathrm{konst}\,.$$

Zderivováním této funkce musíme zjistit, že derivace se rovná nule nezávisle na h. Zderivováním dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}h} = \frac{4}{3}\pi\varkappa\frac{\varrho\left(R+h\right)^3 - 2R^3\left(\varrho_{pl} - \varrho\right)}{\left(R+h\right)^3}\,.$$

Z tohoto vztahu je vidět, že $\mathrm{d}g/\,\mathrm{d}h$ závisí na h, a tedy g se musí měnit s hloubkou. To znamená, že v zadání je chyba, nemůžeme mít konstantní g po celou dobu ponořování.

Pavol Habuda

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.