

## Zadání II. série



*Termín odeslání: 6. prosince 1999*

### *Milí řešitelé,*

máte v rukou zadání druhé série úloh 13. ročníku Fykosu. Připomeňme na tomto místě několik důležitých organizačních záležitostí:

Řešení úloh 1. série s průběžnou výsledkovou listinou dostanete se zadáním 3. série začátkem prosince. Pokud jste 1. sérii neřešili, není nic ztraceno, můžete se zapojit i nyní.

Změnila se adresa semináře (Katedra teoretické fyziky byla přejmenována na Ústav teoretické fyziky). Novou adresu najdete na konci letáku.

Aby pravděpodobnost, že pošta doručí vaše řešení až k nám, byla co největší, je vhodné posílat řešení doporučeně. Každému, kdo nám pošle (třeba e-mailem) svůj e-mail, budeme vždy poté, co nám od něj dojde řešení, posílat krátkou zprávu, ve které potvrdíme, že řešení skutečně došlo. Předejte se tak nepříjemným překvapením, neboť jinak řešitel zjistí, že se řešení ztratilo, až ve výsledkové listině.

**Jiří Franta**

### **Úloha II. 1 ... kondenzátor**

Představte si válcový kondenzátor. Jsou to dva sousední dlouhé válce o poloměrech  $r_1$ ,  $r_2$  ( $r_1 > r_2$ ), na menším je kladná hustota náboje  $\sigma$ , na větším stejně velká záporná. Pokud mezi válce vypustíme elektron, může v kondenzátoru obíhat po kruhové dráze. Určete rozsah možných frekvencí, se kterými může elektron v kondenzátoru obíhat. Může obíhat i vně kondenzátoru?

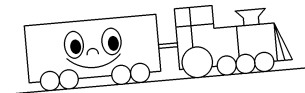
### **Úloha II. 2 ... kyvadélko na vozičku**

Mějme matematické kyvadlo o hmotnosti  $m$  a délce  $l$  umístěné na vozičku. Voziček má hmotnost  $M$  a je volně (bez odporových sil) pohyblivý po rovině. Určete periodu malých kmitů kyvadla.

### **Úloha II. 3 ... cowboy**

Oblíbenou zábavou jednoho fyzikálně nadaného cowboye je střílení z pistole do plechovek. Jednou mu někdo do plechovek nasypal písek. Vystřelená kulka, jak cowboy později zjistil, v písku uvízla. Měla mosazné jádro s olověným pláštěm, který se v písku celý roztavil. Co s toho vyplývá o hmotnosti písku v plechovce, když kulka letěla rychlostí 440 m/s, má hmotnost 10 g a hmotnostní podíl olova a mosazi je 1 : 1?

### **Úloha II. 4 ... vláček motoráček**



Obr. 1

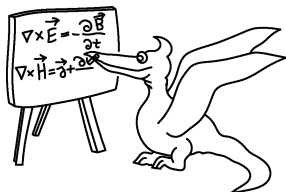
Železničáři v Lipce mají dlouhou chvíli a hrají si s vagóny. Mají k dispozici strašně dlouhý kopec na Kubovu Huť se sklonem 2% (na 100 m délky stoupne o 2 m). Předpokládejme, že kopec se najednou zvedá z roviny. Roztlačí-li dlouhou soupravu vagónků na rychlost 5 m/s, souprava vyjede částečně na kopec (nevyjede tam celá) a zase sjede dolů. Určete čas, po který bude alespoň jedním kolem na kopci. Celková délka soupravy je 120 m.

### **Úloha II. P ... takové malé zatmění**

Vezmeme-li astronomické ročenky za posledních 100 let, zjistíme, že slunečních zatmění je přibližně 1,5 krát více než zatmění měsíčních. Zkuste přijít na to, proč je tomu tak.

Úloha II. Exp ... *sloupec cukru*

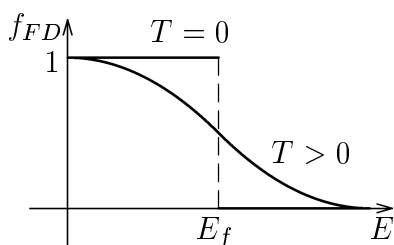
Jistě víte, že když ponoříte kostkový cukr do čaje, voda do kostky vzlíná. Je na vás, abyste vymysleli vhodnou aparaturu a proměřili do jaké výšky kapalina vystoupí, máte-li hodně vysoký sloupec kostek cukru (pokud budete mít chuť, tak třeba i závislost výšky na čase). Navrhněte nějaký fyzikální model. Ve vodě se ale cukr rozpouští, takže se záhy rozpadne. Použijte tedy raději benzín, líh či jinou kapalinu, ve které se cukr nerozpouští.



## Seriál na pokračování

## Fermi-Diracovo rozdělení

Pevné látky obecně nemusí tvořit krystalovou strukturu, my se ale budeme nadále zabývat krystalickými látkami. V nich jsou atomy k sobě vázány *kovalentními* vazbami. V tomto druhu vazeb se uplatňují takzvané výměnné síly, které drží atomy pohromadě. Z každého atomu přispívá aspoň jeden elektron k tvorbě vazby tak, že „obíhá“ chvíli kolem svého jádra a poté kolem cizího. Výsledkem je vzájemné sdílení elektronů sousedními atomy. Právý původ přitažlivých sil je ale nutné vysvětlit pomocí kvantové mechaniky, klasická představa však přibližně odpovídá realitě. Zvláštním druhem *kovalentní* vazby je vazba *kovová*. Při jejím uplatnění nejsou elektrony sdíleny pouze sousedními atomy, ale atomy z celé krystalové mříže. Takové elektrony je možné popsat jako tzv. elektronový plyn, což není nic jiného než plyn se zvláštními vlastnostmi. Minule jsme ale připomněli Pauliho vylučovací princip, to by ovšem znamenalo, že v celém objemu plynu nesmí být elektrony se stejnou energií, kvadrátem momentu hybnosti a spinem. Víme však, že vzájemným silovým působením mezi atomy v těsné krystalové mříži vznikají z původně diskrétních hladin (tzn. elektron na jedné hladině nesmí měnit svou energii spojitě, ale po určitých *kvantech*, tedy konečných a nenulových skocích) pásy povolených energií.



Obr. 2

V minulém díle seriálu jsme se omezili na strohé konstatování, že při zvyšování teploty vodiče nebo polovodiče se do vodivostního pásu dostává více elektronů. Otázkou zůstává, kolik přesně. Sice byl uveden přibližný vztah, ale ten platí pouze při vysokých teplotách a velkých energiích elektronů. S pomocí statistické fyziky (neplést si se statistikou) bylo odvozeno statistické\* rozdělení počtu elektronů s různou energií. Není zde tolik prostoru na odvozování, proto se musíme spokojit s výsledkem — mohou pouze prozradit, že při odvozování vycházíme je opět z Pauliho vylučovacího principu. Počet elektronů s určitou energií  $E$  je dán vztahem

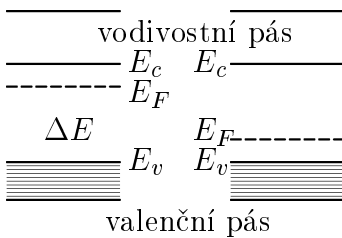
$$f_{FD} = \frac{1}{\exp\left[\frac{E-E_F}{kT}\right] + 1},$$

kde  $E_F$  je Fermiova hladina (Fermiova energie),  $k$  je Boltzmannova konstanta a  $T$  je termodynamická teplota (v Kelvinech!). Pokud by byl elektronový plyn zmrazen na absolutní nulu, je jasné, že v intervalu  $\langle -\infty, E_F \rangle$  bude  $f_{FD} = 1$ , pro  $E = E_F$  bude  $f_{FD} = \frac{1}{2}$  a na intervalu  $\langle E_F, \infty \rangle$  bude  $f_{FD} = 0$ . Takže nyní vidíme význam Fermiovy hladiny: při teplotě absolutní nuly by energetické hladiny byly obsazeny až po hladinu s energií  $E_F$ , žádný elektron by nemohl mít energii vyšší. Pokud teplotu zvýšíme, původní schod se zaoblí (viz obr. 2) a šířka intervalu, kde je zaoblení zřetelné je přibližně  $2kT$ .

\*) To znamená, že máme nekonečně mnoho elektronů s určitými požadovanými vlastnostmi a zajímáme se o střední hodnoty zkoumaných veličin

Fermiova hladina v čistých polovodičích a kovech je uprostřed zakázaného pásu, takže kromě omezení výskytu elektronu Fermi-Diracovým rozdělením ještě musíme připočítat omezení zakázaným pásem. Je jasné, že pokud  $kT < E_g$ , kde  $E_g$  je šířka zakázaného pásu, bude ve vodivostním pásu zanedbatelné množství elektronů.

### Příměsové polovodiče



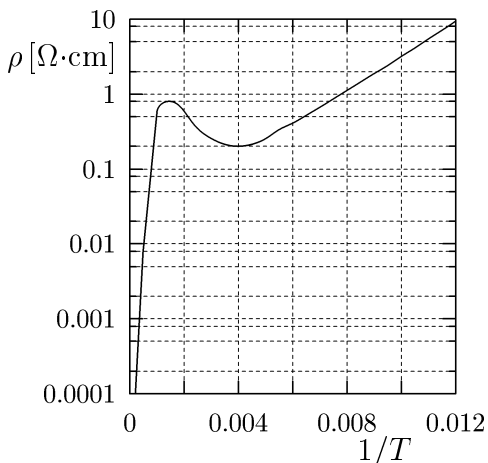
Obr. 3

Pokud je polovodič čistý, všechny valenční elektrony se účastní vazeb mezi atomy v mřížce. Např. atomy germania tvoří kubickou mřížku, kde každý atom je svými čtyřmi valenčními elektrony vázán se čtyřmi sousedními atomy. Přidáním např. fosforu (substitucí za atom germania) se významně nenaruší prostorová mřížka, protože v daném místě je atom fosforu schopen vytvořit pouze čtyři vazby, ačkoliv má pět valenčních elektronů. Tím pádem zbyde jeden elektron, který se neúčastní vazby mezi atomy a je vázán pouze ke svému atomu. Tato vazba je slabá, takže k její rozrušení stačí pouze foton nebo kmit mřížce (fonon) o relativně nízké energii. Tím se poměrně snadno (oproti přechodu přes zakázaný pás) dostane elektron do vodivostního pásu. Protože více než čtyřmocné atomy dodávají elektrony, nazývají se tyto atomy *donory*.

Obr. 4

Mají větší elektronovou a tím i celkovou vodivost než čisté polovodiče. V pásové struktuře můžeme příměs znázornit jako v obr.3. Fermiova hladina se posune výše ke dnu vodivostního pásu, takže ve vodivostním pásu dle Fermi-Diracova rozdělení bude více elektronů než v čistém polovodiči při stejné teplotě. Příměsové polovodiče s donorovou příměsí se označují jako *polovodiče typu n*.

Naopak *akceptory* jsou příměsi, které jsou méně než čtyřmocné. Opět se zrealisují čtyři vazby, jedna ale bude neúplná. Při tvorbě této vazby se uplatní opět výměnné síly, ale vyměňovat se může pouze jeden elektron, takže vazba bude mnohem slabší než vazba úplná. To ale v pevné mřížce nevádí, důležité je to, že takto vznikla „díra“ pro elektron, který ji může zaplnit, avšak musí opustit svoji vazbu, takže se díra prostorově posouvá a chová se jako kvazičástice \*). Ve schématu pásů energie je akceptorová příměs znázorněna na obr. 4 — Fermiova hladina se posune směrem k horní hranici valenčního pásu, takže ve vodivostním pásu bude méně elektronů, ale vodivost se uplatňuje děrová. Na atomu příměsi bude lokalizovaný záporný náboj, kladná díra bude mít nízkou ionizační energii, takže vodivost v *polovodiči typu p* bude opět vyšší než v čistém polovodiči při stejné teplotě.



Obr. 5

*Příklad:* Pokud budeme zvyšovat teplotu mřížce polovodiče typu *p* z absolutní nuly, bude se do vodivostního pásu postupně dostávat stále více příměsových elektronů (k excitaci ostatních nemůže dojít, protože tepelné kmity mřížce mají příliš nízkou energii) a vodivost polovodiče poroste. Při určité teplotě budou všechny příměsové atomy ionizovány, takže počet volných elektronů neporoste, nebo poroste mírně. Vodivost ale nezůstane stejná, protože atomy v mřížce s růstem teploty více kmitají a tím se sníží pohyblivost elektronů — s růstem teploty bude vodivost klesat. Až když se začne uplatňovat přechod elektronů přes zakázaný pás, vodivost opět poroste. Vše je znázorněno v grafu na obr. 5 — jedná se o závislost vodivosti křemíku s donorovou příměsí na teplotě.

### Fotovodivost

Jistě nám není cizí představa fotonu jako částice (stejně jako elektron se může chovat také jako elektromagnetická vlna). Uvažujme fotony a elektrony jako částice, které spolu mohou interagovat. Elektron, který je vázán ve valenčním pásu polovodiče může být vyražen fotonem do vodivostního pásu. Přitom ale musí být splněny zákony zachování energie a hybnosti. Lze ukázat, že při změně

\*) Při popisu kvazičástic můžeme objektu, který vlastně není částicí, přiřadit hmotnost, náboj, pohyblivost, atd., takže popis je stejný jako popis částic. Odtud pojem *kvazičástice*

energie elektronu o energii fotonu jsou oba zákony díky existenci diskretních energetických hladin pro elektron splněny (narozdíl od volného elektronu — tzv. Comptonův rozptyl). Při takové excitaci foton vždy ztratí veškerou svou energii, musí tudíž zaniknout. Potom mluvíme o absorpci fotonu elektronem spojené s excitací elektronu do vodivostního pásu. Pochopitelně vznikne pár elektron-díra a zvýší se vodivost polovodiče. Tento jev se nazývá fotovodivost (zvýšení vodivosti polovodiče ozářením) a využívá se k detekci relativně velkých světelných toků. Podívejme se na jev trochu kvantitativně:

Nechť polovodič o indexu lomu  $\tilde{n}_1$  je v prostředí o indexu lomu  $n_0$ . Na povrch polovodiče dopadá kolmo záření o energii  $h\nu \geq E_g$ . Koeficient odrazivosti záření povrchem bude potom

$$R = \left| \frac{\tilde{n}_1 - n_0}{\tilde{n}_1 + n_0} \right|^2 .$$

Do objemu polovodiče projde při osvětlení světlem o intenzitě  $I_0$  světlo o intenzitě

$$I = I_0(1 - R) = I_0 \frac{4|\tilde{n}_1 n_0|}{|\tilde{n}_1 + n_0|^2} .$$

Je zřejmé, že při excitaci elektronů musí zpětně docházet k rekombinaci — elektron přejde z vodivostního pásu zpět do valenčního a zaplní díru. Přitom vyzáří energii buďto v podobě fotonu (jevu říkáme luminescence), nebo v podobě několika fononů (zvýší se kmity mříže). Rychlost tohoto děje se liší v různých polovodičích, má proto smysl zavést doby života děr resp. elektronů  $\tau_d$  resp.  $\tau_e$ . Bystrý fyzik sice namítne, že vždy vzniká pár elektron-díra, proto nutně  $\tau_e = \tau_d$ , ale situace se mění v příměsových polovodičích, proto zavedeme konstanty obě. Předpokládejme, že ve vodivostním pásu je mnohem méně elektronů než ve valenčním, pak při uvažovaném osvětlení bude za jednotku času vznikat  $Ig$  párů elektron-díra, kde  $g$  je konstanta úměrnosti charakteristická pro daný polovodič. Přírůstek koncentrace nosičů bude potom v rovnovážném stavu

$$\begin{aligned} \Delta n_e &= Ig\tau_e \\ \Delta n_d &= Ig\tau_d . \end{aligned} \quad (1)$$

Vodivost se potom změní o

$$\Delta\sigma = eIg(\tau_e\mu_e + \tau_d\mu_d) .$$

Na konec bychom se chtěli omluvit za malou chybu v předchozím dílu seriálu: v několika vztazích bylo zaměněno  $\mu_e$  za  $\mu_n$ .

## Úloha II. S ... vodivost polovodičů

1. Kolik elektronů je ve vodivostním pásu ( $E \geq 0$ ) nepříměsového polovodiče se šířkou zakázaného pásu 0,6 eV?
2. V příkladu byla ilustrována závislost vodivosti polovodiče s donorovou příměsí na teplotě. Jak se bude chovat polovodič s akceptorovou příměsí?
3. Je-li v čase  $t = 0$  excitováno  $n_e(0)$  elektronů do vodivostního pásu, bude jejich počet klesat exponenciálně, konkrétně bude platit  $n_e(t) = n_e(0) \exp(-t/\tau_e)$ . Když budeme excitovat od okamžiku  $t = 0$  za jednotku času  $c_e$  elektronů, tvrdili jsme, že se počet elektronů ve vodivostním pásu změní o hodnotu  $c_e\tau_e$  (viz vztah 1). Na vás je, abyste tento vztah dokázali.

Naše adresa:

**FYKOS**

**Matematicko-fyzikální fakulta UK — ÚTF**

**V Holešovičkách 2**

**180 00 Praha 8**

<http://www.mff.cuni.cz/news/fks>

Fyzikální korespondenční seminář, který je zastřešen Oddělením vnějších vztahů a propagace MFF UK, je organizován studenty MFF UK za podpory Ústavu teoretické fyziky MFF UK a jeho zaměstnanců a Jednoty českých matematiků a fyziků.