12. ročník, úloha V . 4 ... *kulička a nakloněná rovina* *(5 bodů; průměr ?; řešilo 60 studentů)*

Dokonale pružnou ocelovou kuličku spustíme z výšky h (měřeno od místa dopadu) na nakloněnou rovinu, svírající s vodorovnou rovinou úhel α. Ve vzdálenosti d od místa dopadu kuličky (ve směru klesání roviny) je svislá stěna. Určete jak vysoko (nad místem dopadu) v ní musíme udělat otvor, aby jím kulička proletěla. Řešte nejprve obecně a pak pro hodnoty $h = 50\,\mathrm{cm}$, $d = 15\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 15^\circ$. Diskutujte pohyb kuličky v případě, že nakloněná rovina je nekonečná a kuličce nic v cestě nestojí.

Nejdříve bychom se chtěli omluvit za menší nejasnost v zadání. Písmenem d byla označena horizontální vzdálenost místa dopadu a svislé stěny, tj. vzdálenost měřená na kolmici k této stěně. Nekteří řešitelé pochopili zadání jinak a pod symbolem d si představovali vzdálenost místa dopadu k nejbližšímu průsečíku svislé stěny a nakloněné roviny. Za toto špatné pochopení jsem samozřejmě body nestrhával.

Teď se podívejme, jak měla být úloha správně vyřešena, pokud pod písmenem d rozumíme první z výše uvedených možných významů. Kulička dopadne na nakloněnou rovinu svisle, úhel dopadu bude α. Pod stejným úhlem se i odrazí, takže nyní bude směr rychlosti kuličky svírat s vodorovnou rovinou úhel $90^\circ - 2\alpha$. Teď už stačí použít známé vzorce pro šikmý vrh

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \cos(90^\circ - 2\alpha)\,, \\ y &= v_0 t \sin(90^\circ - 2\alpha) - \tfrac{1}{2} g t^2\,. \end{aligned}$$

Počátek souřadnic jsme umístili do místa dopadu kuličky. Zde uvedenou rychlost odrazu v_0 snadno vypočteme ze zákona zachování mechanické energie

$$\tfrac{1}{2} m v_0^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2gh}\,.$$

Ještě než provedeme další výpočty, můžeme si život ulehčit použitím známých vztahů pro goniometrické funkce

$$\cos(90^\circ - 2\alpha) = \sin(2\alpha)\,, \qquad \sin(90^\circ - 2\alpha) = \cos(2\alpha).$$

Nyní již můžeme vypočítat přímo neznámou výšku l, jedná se totiž o souřadnici y v čase t_l, kdy se x rovná d.

$$t_l = \frac{d}{v_0 \sin(2\alpha)} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{d v_0 \cos(2\alpha)}{v_0 \sin(2\alpha)} - \frac{g d^2}{2 v_0^2 \sin^2(2\alpha)} = d \operatorname{cotg}(2\alpha) - \frac{d^2}{4h \sin^2(2\alpha)}\,.$$

Numericky pak vychází $l = 21{,}5\,\mathrm{cm}$.

Teď uvažujme případ, kdy je nakloněná rovina nekonečná a kuličce nic nestojí v cestě. Práci si velice zjednodušíme, pokud si zavedeme novou soustavu souřadnic. Počátek umístíme opět do místa prvního dopadu kuličky, osa X bude ležet na nakloněné rovině ve směru jejího největšího spádu a osa Y bude na ni kolmá, přičemž místo, odkud byla kulička původně vypuštěna, bude ležet v rovině XY. Toto místo pak bude mít zápornou souřadnici X, zatímco jeho souřadnice Y bude kladná. Nyní si rozložíme pohyb do směru X a Y. Tíhové zrychlení pak bude mít dvě složky

$$g_X = g \sin\alpha\,, \qquad g_Y = -g\cos\alpha\,.$$

Pohyb ve směru X bude po celou dobu rovnoměrně zrychlený

$$X = v_0 t \sin\alpha + \tfrac{1}{2} g t^2 \sin\alpha\,.$$

Ve směru Y bude situace o něco složitější. Pokaždé, když kulička dopadne na nakloněnou rovinu, změní svou rychlost ve směru Y na opačnou, takže bude skákat s periodou $T = 2v_0/g = 2\sqrt{2h/g}$. Vzorcem to můžeme vyjádřit takto

$$Y = v_0 (t \bmod T) \cos\alpha - \tfrac{1}{2} g (t \bmod T)^2 \cos\alpha\,.$$

Hodnotu funkce (t mod T) vypočítáte, pokud budete od t neustále odečítat T, a teprve když dostanete číslo menší než T, tak s odečítáním skončíte. Z diskuze je zřejmé, že vzdálenost kuličky od nakloněné roviny se bude neustále periodicky měnit od nuly do $h\cos\alpha$ a zpět.

Michal Fabinger

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.