12. ročník, úloha IV . P ... v balóně *(5 bodů; průměr ?; řešilo 37 studentů)*

Vzduch v horkovzdušném balónu je zahříván konstantním příkonem, aby se vyrovnaly tepelné ztráty a balón letěl stále ve stejné výšce. Průměrná teplota vzduchu v balónu je $t = 57°C$, teplota okolního vzduchu je $t_0 = 17°C$. Tlak vzduchu v balónu je roven okolnímu tlaku. Pokud zvýšíme příkon hořáku tak, aby teplota v balónu vzrostla o $\Delta t = 0{,}1°C$, o kolik se změní výška letu balónu?

Kvant 1986-8

Označme m_z celkovou hmotnost balónu (bez vzduchu), V celkový objem balónu, ϱ hustotu okolního vzduchu a ϱ_b hustotu horkého vzduchu v balónu. Objem horkého vzduchu v balónu je prakticky roven V. Pro výslednou sílu F, která působí na balón, potom platí (považujeme-li směr nahoru za kladný)

$$F = (\varrho - \varrho_b)\, Vg - m_z g\,, \tag{1}$$

Teplota T' okolního vzduchu v troposféře závisí lineárně na výšce h $T' = T_0 + ah$, kde $a = -6{,}5\,\mathrm{mK{\cdot}m^{-1}}$. Teplotu horkého vzduchu v balónu označme T. Tlak p okolního vzduchu je stejný jako tlak horkého vzduchu. Hustoty ϱ a ϱ_b vyjádříme pomocí stavové rovnice ideálního plynu následovně

$$\varrho = \frac{pM_m}{R_m T'}\,, \qquad \varrho_b = \frac{pM_m}{R_m T}\,. \tag{2}$$

Protože hmotnost m_z je během letu prakticky stálá, je pro rovnovážné polohy balónu rozdíl $\varrho - \varrho_b$ konstantní. Změní-li se tedy teplota T o Δt, potom se výška h změní o Δh a platí

$$\frac{pM_m}{R_m T'} - \frac{pM_m}{R_m T} = \frac{(p + \Delta p)\, M_m}{R_m\,(T' + a\Delta h)} - \frac{(p + \Delta p)\, M_m}{R_m\,(T + \Delta t)}\,. \tag{3}$$

Pro malé změny výšky h lze změnu tlaku Δp vyjádřit jako $-\varrho g \Delta h = -pM_m/R_m T' \cdot g\Delta h$. Dosadíme-li toto vyjádření změny tlaku do rovnice (3), pak získáme vztah

$$\frac{1}{T'} - \frac{1}{T} = \left(1 - \frac{M_m g \Delta h}{R_m T'}\right)\left(\frac{1}{T' + a\Delta h} - \frac{1}{T + \Delta t}\right)\,.$$

Úpravami tohoto vztahu a zanedbáním členů obsahujících součin dvou diferencí (Δt a Δh jsou malé) dostaneme

$$\Delta h = \frac{T'^2 \Delta t}{\frac{M_m g}{R_m}\, T\,(T - T') + aT^2}\,. \tag{4}$$

Po dosazení konkrétních hodnot do vztahu (4) dostaneme, že $\Delta h = -33\,\mathrm{m}$. To je však poněkud divné. Vztah (4) není zcela správný. Uvedený vzorec totiž popisuje, jak se mění výška rovnovážné polohy balónu se změnou teploty vzduchu, který je v něm obsažen. Podíváme-li se však na vztah (1), potom zjistíme, že při ohřátí vzduchu v balónu se balón začne vždy pohybovat směrem nahoru. V našem případě je to však směrem od rovnovážné polohy - to znamená, že balón je v labilní poloze. Kde se tedy balón zastaví a za jakých podmínek lze užít vztah (4)?

Má-li být původní poloha stabilní, potom výraz $\varrho - \varrho_b$ musí s rostoucí výškou klesat. Hustoty ϱ a ϱ_b jsou závislé na tlaku p, který závisí na výšce h. Pro závislost tlaku p okolního vzduchu na výšce h lze odvodit vzorec

$$p = p_0 \left(1 + \frac{ah}{T_0}\right)^{-M_m g / R_m a}\,.$$

Dosadíme-li předcházející výraz za tlak p do vztahů (2), potom derivací zjistíme, že podmínka poklesu $\varrho - \varrho_b$ s růstem h je ekvivalentní s nerovností

$$\frac{T'}{T} < 1 + \frac{R_m a}{M_m g}\,. \tag{5}$$

V případě stabilní polohy lze pro výpočet změny výšky použít vztah (4). V tomto případě se balón chová tak, jak bychom očekávali ($\Delta h/\Delta t > 0$).

Co se však stane s balónem, jehož parametry odpovídají zadání úlohy? Budeme-li stále udržovat konstantní teplotu T, potom od jisté výšky h začne vztah (5) platit. To znamená, že od této výšky začne být rozdíl $\varrho - \varrho_b$ klesající. Nejspíše tedy bude existovat nějaká stabilní rovnovážná poloha balónu nad touto výškou. Pro hodnoty $T_0 = 293\,\mathrm{K}$ $p_0 = 0{,}1\,\mathrm{MPa}$ vychází, že se balón ustálí ve výšce $h = 8280\,\mathrm{m}$. Takto to však dopadne pouze v ideálním případě. Skutečná závislost T' na h není obecně lineární a mohou tedy existovat oblasti, kde T' klesá pomaleji s rostoucí výškou popř. i roste. Mohlo by se tedy stát, že by se balón ustálil v nějaké takové oblasti. Balón také může začít nezadržitelně padat k zemi, neboť je v labilní poloze. K tomu stačí pouze malý pokles teploty T horkého vzduchu.

Karel Kolář

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.