12. ročník, úloha IV . 3 ... tyč ve vodě *(4 body; průměr ?; řešilo 57 studentů)*

Tyč o hustotě ϱ_1 a délce l je za jeden konec pohyblivě připevněna k vodorovné hrazdě (tak, že se okolo ní může tyč volně otáčet), druhý konec volně visí. Pokud budeme pomalu spouštět hrazdu dolů, bude se tyč přibližovat k hladině vody ($\varrho > \varrho_1$) a začne se do ní ponořovat. Zjistěte závislost úhlu, který svírá tyč se svislým směrem, na výšce hrazdy nad hladinou.

Řešme problém pro situaci, když se nám tyč dotkne vody, noří se dokud se nedotkne hrazda vody. Samozřejmě předtím je úhel vychýlení nulový a chovaní tyče pod vodou už zadání nevyžaduje, i když iniciativě se meze nekladou, ale body jsem za to nedával.

Koumák by mohl říct, že tyč se nevychýlí během celého ponořování, protože vztlaková síla je kompenzována reakční sílou hrazdy. To však není zajímavé, a proto správný fykosák přemýšlí jinak: zanořením tyče vzroste vztlaková síla natolik, že poloha tyče se stane labilní (při malém vychýlení se už tyč nevrátí zpátky). V reálném životě neexistují ideální podmínky, proto úhel vychýlení nebude vždy nulový.

První a nejdůležitější věc je přijít na to, že když se tyč otáčí kolem pevné osy, je třeba použít momentové věty. Mnozí z vás na to nepřišli. Když ponořujeme tyč pomalu, tak si zidealizujeme úlohu předpokladem, že v každém okamžiku je tyč v rovnováze, což znamená, že celkový moment sil je nulový. Na tyč působí moment M_t tíhové síly a moment M_v vztlakové síly, který je opačného směru. Označme si délku neponořené části tyče l', výšku hrazdy nad hladinou h, S plochu půdorysu tyče a úhel vychýlení od svislého směru α.

$$M_t = F_g \frac{l}{2} \sin\alpha\,, \qquad M_v = F_v \frac{l+l'}{2} \sin\alpha\,,$$

kde

$$F_v = S\varrho(l-l')g\,, \qquad F_g = S\varrho_1 \frac{l}{2}\, g\,, \qquad \cos\alpha = \frac{h}{l'}\,.$$

Dle nulového momentu sil platí

$$0 = M_t - M_v\,.$$

Dosazením, vykrácením a upravením dostaneme chtěnou závislost

$$\alpha = \arccos\left(\frac{h}{l}\sqrt{\frac{1}{1-\varrho_1/\varrho}}\right)\,. \tag{1}$$

Výraz pod odmocninou je dle zadání vždy kladný, přesto tento vztah neplatí pro libovolné h. Na začátku, když je h velké, je moment síly gravitační větší než moment síly vztlakové, proto je poloha $\alpha = 0$ stabilní pro $h \in \langle l\sqrt{1-\varrho_1/\varrho}\,; l\rangle$, a pro $h \in \langle 0; l\sqrt{1-\varrho_1/\varrho}\rangle$ platí vztah (1).

Ladislav Michnovič

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.