12. ročník, úloha IV . 2 ... družice *(4 body; průměr ?; řešilo 63 studentů)*

Špionážní družice létá okolo nepřátelské planety po kruhové dráze v rovníkové rovině. Doba jednoho oběhu je T, planeta má hustotu ϱ. Na jak velké části povrchu planety může družice provádět špionáž?

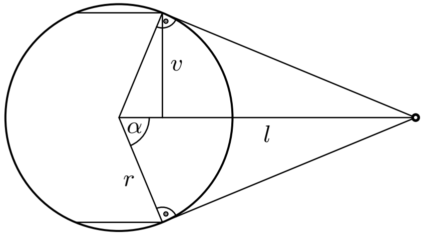
Plocha, kterou vidí družice je kulový pás (koule bez dvou vrchlíků ležících proti sobě). Povrch kulového pásu se počítá $S_v = 2\pi rh$, kde h je výška pásu. V našem případě $h = 2v$. Vyjádříme si jakou část povrchu vidíme

$$p = \frac{4\pi rv}{4\pi r^2} \cdot 100\% = \frac{v}{r} \cdot 100\% = \sin\alpha \cdot 100\,\% .$$

Z pravoúhlého trojúhelníku na obrázku vidíme, že $\cos\alpha = r/l$. Poměr r/l určíme z rovnosti sil pro kruhovou dráhu. Odstředivá síla F_o se rovná síle gravitační F_g

$$m\omega^2 l = \varkappa \frac{mV\varrho}{l^2} ,$$

kde V je objem planety a ϱ její hustota. Objem si můžeme vyjádřit pomocí r poloměru planety jako $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \omega$ určíme z doby oběhu $\omega = (2\pi)/T$. Po dosazení a vykrácení m



Obr. 1

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{4}{3}\pi\varkappa\varrho\left(\frac{r}{l}\right)^3 ,$$

odtud vyjádříme $\sin\alpha = r/l$

$$\cos\alpha = \frac{r}{l} = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{\varkappa\varrho T^2}} .$$

Víme, že $p = \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$

$$p = \sqrt{1 - \left(\frac{3\pi}{\varkappa\varrho T^2}\right)^{2/3}} .$$

Kdyby $\varkappa\varrho T^2 < 3\pi$, potom $l < r$, kde r je poloměr koule působící na družici. Víme však, že na družici může působit koule o poloměru max. l. Takže to platí i pro družici obíhající pod povrchem planety.

Tohle řešení platí pouze pro družici, která má jinou dobu oběhu než planeta, jestli je však družice stacionární, potom nevidí kulový pás, ale jenom kulový vrchlík. Jeho povrch se počítá $S_v = 2\pi rh$, kde h je výška vrchlíku. V našem případě je výška vrchlíku $h = r(1 - \cos\alpha)$. Pro poměr potom dostaneme

$$p = \frac{2\pi rh}{4\pi r^2} \cdot 100\% = \frac{h}{2r} \cdot 100\,\% = \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha) \cdot 100\,\% .$$

Po dosazení už známého $\cos\alpha$ dostaneme výsledek pro tento případ

$$p = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt[3]{\frac{3\pi}{\varkappa\varrho T^2}}\right) \cdot 100\,\% .$$

Miroslav Kladiva & Slavomír Nemšák

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.