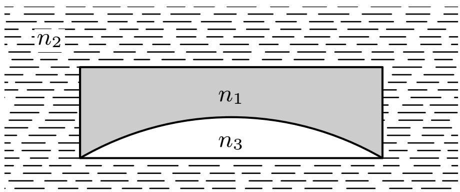
12. ročník, úloha III . 2 ... a zase ta čočka! *(4 body; průměr ?; řešilo 26 studentů)*

Tenkou ploskodutou čočku s poloměrem křivosti lámavé plochy R postupně ponořujeme do vody (obr. 1). Nalezněte závislost optické mohutnosti takovéto soustavy na hloubce ponoření čočky. Znáte index lomu skla, vody a vzduchu při atmosférickém tlaku. Závislost indexu lomu vzduchu na tlaku je lineární.



Obr. 1

Nejprve popíšeme, co se vlastně děje, když se čočka ponořuje. S rostoucí hloubkou se zvyšuje hydrostatický tlak a toto způsobuje vzrůst tlaku ve vzduchové části čočky. Vzhledem k tomu, že v zadání nebylo uvedeno nic o přístroji, který by nám pod čočku dofukoval vzduch a udržoval jeho původní objem, tak se objem vzduchu bude zmenšovat. Pod čočkou nám tedy vznikne vzduchová bublina, jejíž hladina se bude u skla zakřivovat směrem do vzdušného prostoru (voda ke sklu na rozhraní se vzduchem dokonale vzlíná) a v centrální části ji můžeme považovat za vodorovnou (předpokládejme, že čočka je dostatečně velká, aby se neprojevily kapilární jevy). Z výše uvedeného vyplývá, že můžeme kapilární jevy zanedbávat. Vzhledem k tomu, že téměř každý z vás měl svou hypotézu o chování vzdušné části čočky (kromě těch, co stlačování vzduchu „neuvažovali“), tak jsme se rozhodli provést pokus k potvrzení naší hypotézy.

Po provedení drobných úprav (odřezání hrdla a dna) na umělohmotných lahvích od perlivé vody značky $***$ jsme tři takto upravené lahve spojili a získali tak prostor pro cca. 1 m vysoký vodní sloupec (poznámka pro ty, co by nás chtěli napodobit — u spodní lahve je vhodné dno ponechat). K překvapení všech zúčastněných se vodní sloupec rozhodl neopustit naši „nádobu“ a mohli jsme tedy přistoupit k vlastnímu pokusu. Modelem čočky byla sklenice ve vrchní části dostatečně zakřivená (s čočkou se nám velmi špatně manipulovalo), kterou jsme postupně ponořovali. Výsledky našeho experimentování jsou následující:

1. Rovnice kontinuity platí (což se projevilo efektním transportem vody z pro ni vymezeného prostoru na stůl a na Šéfa).
2. Voda je mokrá (o čemž se přesvědčilo — díky prvnímu zjištění — hlavně šatstvo Velkého Šéfa).
3. V rámci neextrémních hloubek lze naši teorii považovat za odpovídající realitě.

Tímto bych chtěl poděkovat Jirkovi Frantovi a Janě Gřondilové za spolupráci.

A nyní můžeme spokojení a mokří přistoupit k vlastnímu řešení úlohy. Úpravou výsledného vztahu ze vzorového řešení 4. příkladu II. série dostaneme vztah pro optickou mohutnost při hladině $D = (n_1 - n_{p_a})/Rn_2$. Označme n index lomu vzduchu při tlaku p, pak

$$D(p) = \frac{n_1 - n}{Rn_2}\,.$$

Dle zadání je n lineární funkcí tlaku $n = kp + q$, kde k, q jsou konstanty. Ze znalosti toho, že pro $p = 0$ je $n = 1$ a pro $p = p_a$ je $n = n_{p_a}$ dostáváme $q = 1$ a $k = (n_{p_a} - 1)/p_a$ a závislost n na p vypadá následovně

$$n = \frac{n_{p_a} - 1}{p_a}\,p + 1\,.$$

(Zde je nutno zdůraznit, že n_{p_a} není rovno jedné.)

Abychom dostali závislost na hloubce ponoření, vyjádříme p jako součet hydrostatického a atmosférického tlaku $p = p_a + h\varrho g$. Finální tvar vzorce pro optickou mohutnost má tedy tvar

$$D = \frac{1}{Rn_2}\left[n_1 - \left(\frac{(n_{p_a} - 1)(p_a + h\varrho g)}{p_a} + 1\right)\right] = \frac{1}{Rn_2 p_a}\left[(n_1 - n_{p_a})p_a + h\varrho g(n_{p_a} - 1)\right] .$$

K tomuto řešení je ovšem nutno dodat, že jeho přesnost bude klesat s hloubkou a to tím více, čím menší poloměr bude mít čočka, neboť hladina se bude v důsledku kapilárních jevů zakřivovat.

Poznámka k hodnocení. Tento příklad byl nešťastný v tom, že i ti, co „zapomněli" na stlačování vzduchu, mohli dostat stejný výsledek (neboť změna objemu vzduchu v námi uvedeném přiblížení nepřispívá ke změně opt. mohutnosti, ale pro větší hloubky a čočky s menším průměrem to bude majoritní jev). Z tohoto důvodu nemohli býti hodnoceni více než polovinou bodů (v případě jinak bezchybného řešení).

Jan Prokleška

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.