12. ročník, úloha II . P ... ve výtahu *(6 bodů; průměr ?; řešilo 41 studentů)*

U každého výtahu v mrakodrapu je jisté riziko, že se zpřetrhají všechna lana, na kterých visí. Abychom předešli případnému úrazu, můžeme výtah vylepšit. Spodní část výtahové šachty utěsníme tak, abychom zamezili úniku vzduchu. Také okolo kabiny výtahu dáme těsnění. Výtah, který se utrhne v horním patře mrakodrapu se zabrzdí o vzduchový polštář, který si pod sebou stlačí. Předpokládejte, že kabina vážící 1000 kg se utrhla 87 m vysoko a vzduchotěsná část výtahové šachty začíná 15 m nad zemí. Jak vysoko nad zemí se kabina nakonec zastaví? Jak velké síly působí po dobu pádu na cestující? V případě výpočtu síly se spokojíme i s kvalifikovaným odhadem, přesný výpočet bude po zásluze odměněn.

Pohyb kabiny výtahu je jednorozměrným problémem. Považujme tedy směr dolů za kladný a směr nahoru za záporný. Výškou kabiny výtahu rozumějme vzdálenost dna kabiny od dna výtahové šachty. Označme m hmotnost kabiny výtahu, S plochu dna kabiny, h výšku vzduchotěsné části výtahové šachty a H výšku, ve které se kabina utrhne. Poměr m/S je výhodné označit jako m^*. Reálné hodnoty m^* leží zhruba mezi 500 až $1000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-2}}$. V dalších výpočtech uvažujme hodnotu $m^* = 750\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-2}}$.

Kvalitativní popis pohybu kabiny je zhruba následující: Kabina se začne pohybovat šachtou směrem dolů vlivem tíhové síly. Tento pohyb je zpomalován působením okolního vzduchu. V okamžiku, kdy dno kabiny dosáhne vzduchotěsné části šachty, začne kabina stlačovat vzduch pod sebou. Rostoucí tlak pod kabinou způsobí její zabrzdění a její následné urychlení směrem nahoru. Děj ve vzduchotěsné části lze považovat za adiabatický, neboť bude poměrně rychlý. To znamená, že velikost rychlosti kabiny po opuštění vzduchotěsné části šachty bude stejná jako při vstupu do ní. Pohyb kabiny směrem nahoru je brzděn jednak tíhovou silou a jednak působením okolního vzduchu. Kabina se tedy zastaví ve výšce, která je menší než výška, ve které pohyb začal. Pohyb kabiny se poté opakuje. Díky působení okolního vzduchu a tepelným ztrátám ve vzduchotěsné části šachty se kabina ustálí někde ve vzduchotěsné části. Zbývá tedy určit tuto výšku.

Tlak vzduchu nad kabinou lze prakticky vždy považovat za rovný atmosférickému. Tlak vzduchu pod kabinou při pohybu v neutěsněné části výtahové šachty bude mít hodnoty zhruba někde mezi p_a a $p_a + m^* g$. V případě, že kabina vstupuje do vzduchotěsné části naposledy, bude tlak vzduchu pod kabinou téměř roven atmosférickému. Teplota T vzduchu ve vzduchotěsné části je stejná před vstupem i výstupem kabiny a je rovna teplotě okolí. Pro výšku h_k, ve které se výtah ustálí (dojde i k vyrovnání teploty plynu s teplotou okolí), tedy platí podle stavové rovnice

$$\frac{(p_a + m^* g) h_k S}{T} = \frac{p_a h S}{T} \quad \Rightarrow \quad h_k = \frac{h}{1 + m^* g / p_a} = 14\,\mathrm{m}\,.$$

Jelikož je $m^* g$ podstatně menší než p_a, vychází h_k téměř rovné h. Protože nic není dokonale těsné, bude kabina velmi pomalu klesat ke dnu výtahové šachty, kde již skončí natrvalo.

Síly působící na cestující lze popsat pomocí veličiny a, která udává zrychlení tělesa v soustavě spojené s kabinou, které mu uděluje výslednice tíhové a setrvačné síly. Aby byl cestující v kabině v klidu, musí na něho působit další síly o výslednici $-m_c a$, kde m_c je hmotnost cestujícího. Je-li výslednice silového působení okolního vzduchu na kabinu rovna F, potom pro a platí

$$a = g - \left(g + \frac{F}{m} \right) = -\frac{F}{m}\,.$$

Určit sílu F je velmi složité. Nejdůležitější informaci o silách působících na cestující udává maximální velikost a.

Pohybuje-li se kabina směrem dolů v neutěsněné části, potom je hodnota a někde mezi 0 a g (přesná hodnota závisí na brzdné síle F). Pohybuje-li se kabina směrem nahoru, potom je $a < 0$, přičemž velikost a bude nejspíše menší než g. Maximálních hodnot a se bude dosahovat při pohybu ve vzduchotěsné části. Je-li y výška kabiny ve vzduchotěsné části šachty, potom pro tlak p pod kabinou platí

$$p_a(Sh)^\varkappa = p(Sy)^\varkappa \quad \Rightarrow \quad p = p_a\left(\frac{h}{y}\right)^\varkappa .$$

To tedy znamená, že

$$a = \frac{(p-p_a)S}{m} = \frac{p_a}{m^*}\left[\left(\frac{h}{y}\right)^\varkappa - 1\right] .$$

Je-li y_m minimální výška y, potom pro maximální hodnotu a_m platí

$$a_m = \frac{p_a}{m^*}\left[\left(\frac{h}{y_m}\right)^\varkappa - 1\right] .$$

Je-li v_0 rychlost, kterou kabina vstupuje do vzduchotěsné části šachty, pak pro minimální y_m platí[1]

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + (p_a + m^*g)(h - y_m)S = \frac{p_aSh}{\varkappa - 1}\left[\left(\frac{h}{y_m}\right)^{\varkappa-1} - 1\right] .$$

Levá strana této rovnosti udává práci, která se vykoná na plynu pod kabinou při jeho adiabatickém stlačení z objemu Sh na objem Sy_m. Jelikož se jedná o adiabatický děj, je tato práce rovna přírůstku vnitřní energie plynu pod kabinou. Tento přírůstek je vyjádřen pomocí pravé strany rovnice. Tvar pravé strany rovnice se dostane úpravou vztahu $C_V n(T_m - T)$ pro přírůstek vnitřní energie za použití stavové rovnice $pV = nRT$ a vztahů $\varkappa = C_p/C_V$, $C_p = C_V + R$. Vyjádříme-li y_m pomocí a_m, potom získáme tento vztah

$$v_0^2 = \frac{2p_ah}{m^*}\left\{\frac{(1 + m^*a_m/p_a)^{(\varkappa-1)/\varkappa} - 1}{\varkappa - 1} - \left(1 + \frac{m^*g}{p_a}\right)\left[1 - \left(1 + \frac{m^*a_m}{p_a}\right)\right]\right\} .$$

Známe-li v_0, pak lze určit a_m. To je však možné pouze numericky. Využijeme-li však toho, že v_0 s rostoucím a_m roste, potom můžeme postupovat i jinak. Bude-li $a_m = 10g$, potom by nemělo dojít k těžkým zraněním cestujících. Pro $a_m = 5g$ by vše mohlo proběhnout bez vážnějších úrazů. Při odhadu těchto mezí je důležité uvědomit si, že k průletu vzduchotěsnou částí může dojít několikrát a směr a se během pohybu neustále mění. Pro uvedené meze vycházejí následující hodnoty

$$a_m = 5g: \quad v_0 = 9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} ,$$
$$a_m = 10g: \quad v_0 = 18\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} .$$

Zbývá určit hodnotu rychlosti v_0. Maximální možná hodnota v_0 je ta, která odpovídá volnému pádu

$$v_0 = \sqrt{2g(H-h)} = 38\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} .$$

[1] Používáme vztahy platné pro rovnovážné děje, i když tento děj rovnovážný není.

Minimální odporová síla vzduchu je určená Newtonovým vzorcem. Té přísluší mezní rychlost v_m

$$v_m = \sqrt{\frac{2m^*g}{C\varrho}} = 110\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,,$$

kde $\varrho = 1{,}28\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ je hustota vzduchu a hodnota C je zhruba 1. Porovnáme-li tuto hodnotu s maximální možnou hodnotou v_0, potom dojdeme k závěru, že v případě velké mezery mezi kabinou a výtahovou šachtou a malé těsnosti stěn výtahové šachty může dojít k těžkým zraněním cestujících popřípadě k jejich smrti.

Je-li celková plocha mezer S', kterými může unikat vzduch z prostoru pod kabinou, podstatně menší než S, potom lze mezní rychlost v_m odhadnout následovně: Tlak pod kabinou je při mezní rychlosti roven $p_a + m^*g$. Je-li rychlost unikajícího vzduchu rovna v, potom dle Bernoulliho rovnice platí

$$p_a + m^*g = p_a + \frac{1}{2}\varrho v^2\,.$$

Mezi v a v_m platí, že $S'v = Sv_m$. Pro v_m tedy dostáváme toto vyjádření

$$v_m = \frac{S'}{S}\sqrt{\frac{2m^*g}{\varrho}}\,.$$

Pro $S'/S < 0{,}1$ dostaneme, že $v_m < 11\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. V tomto případě by se vše mohlo obejít bez vážných úrazů. Nicméně i přesto by bylo lepší užít pokud možno jiný záchranný systém.

Karel Kolář & Ondřej Pejchal

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.