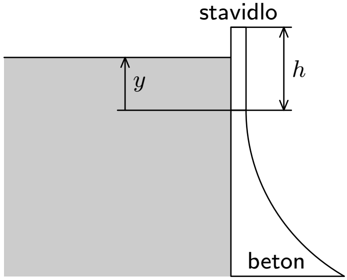
12. ročník, úloha II . 2 ... přehrada *(4 body; průměr ?; řešilo 59 studentů)*

Na řece je postavena přehrada. Plocha umělého jezera je 100 000 m^2, voda z přehrady je vypouštěna stavidlem, které si můžeme představit jako ocelovou desku širokou $l = 20$ m a vysokou $h = 10$ m, která, když přehrada nevypouští žádnou vodu, sedí na betonové konstrukci (obr. 1). Když chceme vodu vypouštět, stavidlo zvedneme a voda poteče mezi dolní stranou stavidla a betonovou konstrukcí přehrady Běžný průtok přehradou je 20 m^3·s^{-1}, průtok větší než 100 m^3·s^{-1} je považován za povodeň.



Obr. 1

Předpokládejme tuto situaci Kvůli plnému energetickému využití je přehrada zcela naplněna vodou ($y = 10$ m), přitéká i odtéká 20 m^3·s^{-1} vody. Náhle (v čase t_0) se obsluha přehrady dozví neradostnou zprávu, že se blíží povodňová vlna — za tři hodiny se přítok najednou zvýší na 200 m^3·s^{-1} a tento stav potrvá další tři hodiny. Poté se přítok opět sníží na 20 m^3·s^{-1}. Obsluha má za úkol zabránit povodni pod přehradou. Nalezněte funkci $f(t)$, která popisuje závislost velikosti zvednutí stavidla na čase v intervalu (0 h; 6 h) tak, aby k povodni pod přehradou nedošlo. Pokud povodni zabránit nelze, stanovte maximální výšku vody y_{max} v čase t_0, pro kterou je ještě možno zabránit povodni a určete funkci $f(t)$.

Při využití maximální přípustné výtokové rychlosti 100 m^3·s^{-1}:

1. klesne před vlnou hladina o $(100 - 20)\,\mathrm{m^3s^{-1}} \cdot 3 \cdot 3600\,\mathrm{s}/100000\,\mathrm{m^2} = 8{,}64\,\mathrm{m}$,
2. po vlně stoupne hladina o $(200 - 100)\,\mathrm{m^3s^{-1}} \cdot 3 \cdot 3600\,\mathrm{s}/100000\,\mathrm{m^2} = 10{,}8\,\mathrm{m}$.

To značí, že pro $y_{\max} = 10$ m přehrada přeteče, jelikož výsledná výška bude 12,16 m $> h$ a povodni tedy nezabráníme. Funkci $f(t)$ budeme proto hledat pro počáteční výšku o 2,16 m menší, tedy $y_{\max} = 7{,}84$ m. Z toho ale plyne, že výška před vlnou bude $7{,}84\,\mathrm{m} - 8{,}64\,\mathrm{m} = -0{,}8\,\mathrm{m}$ pod otvorem. Na tento problematický výsledek můžeme pohlížet více způsoby:

1. Pokud má být v čase $t = 3$ h hladina 0,8 m pod výtokovým otvorem, je toho možné dosáhnout jedině tak, že v čase $t = 0$ h bude hladina vody pod výtokovým otvorem ($y_m < 0$).

   Nevíme však, zda takového stavu lze v námi uvažované přehradě vůbec dosáhnout. Pokud ano (například vyschnutím, nebo vypouštěním vody utajeným nízko položeným otvorem), tak můžeme provést požadované výpočty. Jednoduchými kupeckými počty získáme $y_m = 12{,}4$ m. Funkce $f(t)$ bude do doby, než hladina dosáhne výtokového otvoru (v čase $t_0 = 3{,}22$ h) nedefinována (pro $t < t_0$). Pro $t > t_0$ získáme funkci $f(t)$ tak, že budeme uvažovat, že každou sekundu nám v přehradě přibude $Q = 100\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}}$ ($Q_v = 100\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}}$ budeme stavidlem upouštět). Pro výtokovou rychlost v hloubce y budeme pro zjednodušení používat vztah $v = \sqrt{2yg}$, i když vzhledem k nezanedbatelné šířce štěrbiny vneseme do výsledných vztahů nepřesnosti. Bude tedy platit

$$Q_v = f(t)l\sqrt{2yg} = f(t)l\sqrt{2g(t-t_0)Q/S} \quad \Rightarrow \quad f(t) = \frac{Q_v}{l\sqrt{2g(t-t_0)Q/S}}\,,$$

2. Pokud nepřipustíme polohu hladiny pod výtokovým otvorem, můžeme se alespoň pokusit minimalizovat maximální průtok přehradou. Po uplynutí tří hodin musí být přehrada prázdná, $y_{\max} = 8{,}64$ m. Obdobným výpočtem jako výše pak získáme funkci $f(t)$

   a) pro $t < 3$ h je

$$f(t) = \frac{Q_v}{l\sqrt{2g(y_{\max} + Q_1 t/S)}}\,,$$

kde $Q_v = 100\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}}$ a $Q_1 = -80\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}}$,

b) pro $t > 3\,\mathrm{h}$ je

$$f(t) = \frac{Q_v}{l\sqrt{2gQ_2(t-3\,\mathrm{h})/S}}\,,$$

kde $Q_v = 107\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}}$, $Q_2 = 93\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}}$.

Vzhledem k tomu, že některé hodnoty v zadání byly uvedeny s platností na jednu platnou cifru, můžeme i takovýto výsledek (maximální průtok $Q_v = 107\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}}$) považovat za zabránění povodni.

Miroslav Kladiva & Ladislav Michnovič

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.