

## Zadání VI. série



Termín odeslání: 24. května 1999

**Drazí přátelé,**

dostáváte do rukou zadání poslední série Fykosu tohoto školního roku. Její řešení dostanete společně s řešením 5. série a konečnou výsledkovou listinou až v polovině června. Přejeme vám hodně úspěchů v závěrečném období školního roku.

Jiří Franta

**Úloha VI. 1 ... plyn v láhvi**

Uzavřená nádoba obsahující ideální plyn se pohybuje rychlostí  $v$ . Nádoba se náhle zastaví a veškerá kinetická energie plynu se změní v teplo. Zanedbejte teplo předané stěnám a spočtete, o kolik se zvětší druhá mocnina střední kvadratické rychlosti molekul plynu, je-li plyn

- jednoatomový
- dvouatomový.

Zdůvodněte rozdílné výsledky v případech a) a b).

**Úloha VI. 2 ... dipól v magnetickém poli**

Mějme elektrický dipól (představte si ho jako dvě částice se stejnými hmotnostmi  $m$  a náboji  $+q$  a  $-q$  upevněné na koncích nehmotné tyčky délky  $l$ ). Otáčí se v horizontální rovině okolo vertikální osy procházející středem dipólu. Popište pohyb dipólu poté, co zapneme konstantní vertikální magnetické pole  $B$ .

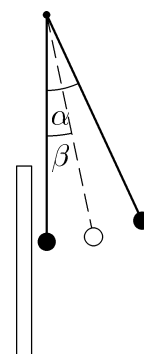
**Úloha VI. 3 ... oscilační obvody**

Rezonanční obvod se skládá z neideální cívky s indukčností  $L = 1 \text{ H}$  a vnitřním odporem  $R = 1 \Omega$  a neideálního kondenzátoru s kapacitou  $C = 1 \mu\text{F}$  o neznámém svodovém odporu  $R_x$ . Jaká je velikost  $R_x$ , pokud víme, že se  $1/3$  původní energie rezonančního obvodu ztácí v podobě tepla na odporu cívky?

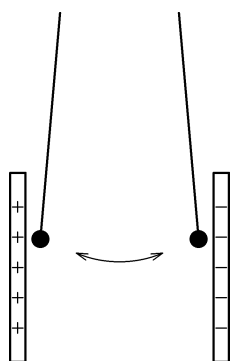
**Úloha VI. 4 ... míček v kondenzátoru**

Malá kovová kulička o hmotnosti  $m = 3,0 \text{ g}$  je zavěšena na tenkém hedvábném vlákne délky  $l = 30 \text{ cm}$  tak, aby se dotýkala svislé kovové desky. Kuličku vychýlíme o úhel  $\alpha$  a uvolníme. Po odrazu od desky se kulička vychýlí o úhel  $\beta < \alpha$  (obr. 1).

Při druhém pokusu umístíme do vzdálenosti  $d = 5,0 \text{ cm}$  od první desky druhou stejně velkou. Závěs kuličky prodloužíme, aby byl mnohem delší než vzdálenost desek. Připojíme-li desky ke zdroji vysokého napětí  $U = 2,00 \cdot 10^4 \text{ V}$  a závěs vychýlíme, kulička se rozkmitá a naráží střídavě na levou a pravou desku (obr. 2). Perioda nárazů se brzy ustálí na hodnotě  $T = 0,45 \text{ s}$ . Jak se mění při druhém pokusu rychlost kuličky mezi dvěma nárazy na desky? Jaký náboj nese kulička během letu mezi deskami?



Obr. 1



Obr. 2

**Úloha VI. P ... gravitace**

Už od pradávna se lidé zabývali pozorováním oblohy a později pohybem planet okolo Slunce. Jak se to historicky odehrálo, asi všichni znáte. Tycho de Brahe sledoval mnoho let pohyby planet a zhotovil rozsáhlé tabulky. Z nich vyšel Kepler a objevil své zákony. Těch využil Newton, lépe pochopil podstatu těchto zákonů a dospěl ke krásnému vztahu:

$$F_G = \kappa \frac{mM}{r^2}.$$

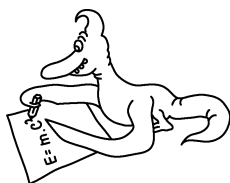
Takto popisujeme pouze pohyb planet okolo Slunce. Můžeme říci, co vyvolává tuto sílu? Tímto se zabýval i Newton a nakonec se uspokojil poznáním toho, co se odehrává, bez znalosti mechanismu. Dodnes jej nikdo neobjevil. Bylo navrženo více mechanismů gravitace. Jeden ze zajímavých je tento:

Představte si, že v prostoru je velké množství částic, které se pohybují velkou rychlostí ve všech směrech a jsou málo absorbované při průchodu hmotou. Když jsou pohlceny Zemí, předávají jí hybnost. Když je těch, které jdou jedním směrem, stejně jako těch z opačného směru, jsou hybnosti vyvážené. Když se k Zemi přiblíží Slunce, jsou částice přicházející na Zemi přes Slunce částečně absorbovány a ve směru od Slunce jich přichází méně než z opačné strany. Země proto získá hybnost směřující k Slunci.

Na vás je, abyste ověřili, jestli je taková gravitační síla nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti (uvažujte dvě koule, kde jedna je mnohem menší než ta druhá — stačí přibližně). Jak asi tušíte, tento mechanismus gravitace není správný. Zkuste přijít na to, kde selhává. Návod: najděte chybné důsledky.

### Úloha VI. Exp ... atmosférický tlak

Změřte atmosférický tlak v místě vašeho bydliště a to touto metodou: Ponořte do nádoby s vodou prázdnou skleničku dnem vzhůru a z toho, jak vysoko se dostane voda ve skleničce spočítejte atmosférický tlak. Znáte hustotu vody  $\rho$  a tíhové zrychlení  $g$ . Nezapomeňte uvést místo a čas měření.



## Řešení IV. série

### Úloha IV. 1 ... hokejista (3 body, řešilo 77 studentů)

Hokejista jede po ledě jen po jedné brusli. Led, který má hustotu  $0,9 \text{ gcm}^{-3}$  pod bruslí taje do hloubky  $h = 0,03 \text{ mm}$ . Nůž brusle je široký  $d = 2 \text{ mm}$ . Skupenské teplo tání ledu je  $\lambda = 3,3 \cdot 10^5 \text{ Jkg}^{-1}$ . Spočítejte velikost třecí síly mezi bruslí a ledem. Tepelnou vodivost ledu zanedbejte.

Předpokládejme, že teplota tání ledu je stejná jako teplota okolního prostředí. Dále budeme předpokládat, že hokejista se po ledě pohybuje rovnoměrně a zanedbáme ohřev brusle.

Pokud ujede dráhu  $s$ , pak třecí síla  $F_t$  vykoná práci  $W = F_t s$ . Tato práce bude rovna energii potřebné ke skupenské přeměně ledu o hmotnosti  $m$ , kde  $m = d h s \rho$ . Získáme tedy vztah  $E = m \lambda = d h s \rho \lambda = F_t s = W$  a tedy  $F_t = d h \rho \lambda$ . Po dosazení získáme výsledek  $F_t = 17,82 \text{ N} \doteq 18 \text{ N}$ .

**Jan Prokleška**

### Úloha IV. 2 ... družice (4 body, řešilo 63 studentů)

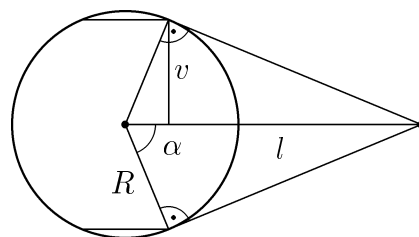
Špionážní družice létá okolo nepřátelské planety po kruhové dráze v rovníkové rovině. Doba jednoho oběhu je  $T$ , planeta má hustotu  $\rho$ . Na jak velké části povrchu planety může družice provádět špionáž?

Plocha, kterou vidí družice je kulový pás (koule bez dvou vrchlíků ležících proti sobě). Povrch kulového pásu se počítá  $S_v = 2\pi r h$ , kde  $h$  je výška pásu. V našem případě  $h = 2v$ . Vyjádříme si jakou část povrchu vidíme:

$$p = \frac{4\pi r v}{4\pi r^2} \cdot 100\% = \frac{v}{r} \cdot 100\% = \sin \alpha \cdot 100\%$$

Z pravoúhlého trojúhelníku na obrázku vidíme, že :

$$\cos \alpha = \frac{r}{l}$$



Obr. 3

$r/l$  určíme z rovnosti sil pro kruhovou dráhu. Odstředivá síla  $F_o$  se rovná síle gravitační  $F_g$ :

$$m\omega^2 l = \kappa \frac{mV\rho}{l^2},$$

kde  $V$  je objem planety a  $\rho$  její hustota. Objem si můžeme vyjádřit pomocí  $r$  poloměru planety jako  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ .  $\omega$  určíme z doby oběhu  $\omega = (2\pi)/T$ . Po dosazení a vykrácení  $m$ :

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{4}{3}\pi\kappa\rho\left(\frac{r}{l}\right)^3$$

odtud vyjádříme  $\sin \alpha = r/l$ :

$$\cos \alpha = \frac{r}{l} = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{\kappa\rho T^2}}$$

Víme, že  $p = \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ :

$$p = \sqrt{1 - \left(\frac{3\pi}{\kappa\rho T^2}\right)^{2/3}}$$

Kdyby  $\kappa\rho T^2 < 3\pi$ , potom  $l < r$ , kde  $r$  je poloměr koule působící na družici. Víme však, že na družici může působit koule o poloměru max.  $l$ . Takže to platí i pro družici obíhající pod povrchem planety.

Tohle řešení platí pouze pro družici, která má jinou dobu oběhu než planeta, jestli je však družice stacionární, potom nevidí kulový pás, ale jenom kulový vrchlík. Jeho povrch se počítá  $S_v = 2\pi r h$ , kde  $h$  je výška vrchlíku. V našem případě je výška vrchlíku  $h = r(1 - \cos \alpha)$ . Pro poměr potom dostaneme:

$$p = \frac{2\pi r h}{4\pi r^2} \cdot 100\% = \frac{h}{2r} \cdot 100\% = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha) \cdot 100\%$$

Po dosazení už známého  $\cos \alpha$  dostaneme výsledek pro tento případ:

$$p = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt[3]{\frac{3\pi}{\kappa\rho T^2}} \right) \cdot 100\%$$

**Miroslav Kladiiva & Slavomír Nemšák**

### Úloha IV.3 ... tyč ve vodě (4 body, řešilo 57 studentů)

Tyč o hustotě  $\rho_1$  a délce  $l$  je za jeden konec pohyblivě připevněna k vodorovné hrazdě (tak, že se okolo ní může tyč volně otáčet), druhý konec volně visí. Pokud budeme pomalu spouštět hrazdu dolů, bude se tyč přibližovat k hladině vody ( $\rho > \rho_1$ ) a začne se do ní ponořovat. Zjistěte závislost úhlu, který svírá tyč se svislým směrem, na výšce hrazdy nad hladinou.

Řešme problém pro situaci, když se nám tyč dotkne vody, noří se dokud se nedotkne hrazda vody. Samozřejmě předtím je úhel vychýlení nulový a chování tyče pod vodou už zadání nevyžaduje, i když iniciativně se meze nekladou, ale body jsem za to nedával.

Koumák by mohl říct, že tyč se nevychýlí během celého ponořování, protože vztlaková síla je kompenzována reakční silou hrazdy. To však není zajímavé, a proto správný fykosák přemýšlí jinak: zanořením tyče vzroste vztlaková síla natolik, že poloha tyče se stane labilní (při malém vychýlení se už tyč nevrátí zpátky). V reálném životě neexistují ideální podmínky, proto úhel vychýlení nebude vždy nulový.

První a nejdůležitější věc je přijít na to, že když se tyč otáčí kolem pevné osy, je třeba použít momentové věty. Mnozí z vás na to nepřišli. Když ponořujeme tyč pomalu, tak si zidealizujeme úlohu předpokladem, že v každém okamžiku je tyč v rovnováze, což znamená, že celkový moment sil je nulový. Na tyč působí moment  $M_{F_t}$  tíhové síly a moment  $M_{F_v}$  vztlakové síly, který je opačného

směru. Označme si délku neponořené části tyče  $l'$ , výšku hrazdy nad hladinou  $h$ ,  $S$  plochu půdorysu tyče a úhel vychýlení od svislého směru  $\alpha$ . Dle nulového momentu sil platí:

$$\begin{aligned} 0 &= M_{F_t} - M_{F_v} \\ M_{F_t} &= F_g \frac{l}{2} \sin \alpha \\ M_{F_v} &= F_v \frac{l+l'}{2} \sin \alpha \\ F_v &= S \rho (l-l') g \\ F_g &= S \rho_1 \frac{l}{2} g \\ \cos \alpha &= \frac{h}{l'} \end{aligned}$$

Dosazením, vykrácením a upravením dostaneme chtěnou závislost

$$\alpha = \arccos \left( \frac{h}{l'} \sqrt{\frac{1}{1 - \rho_1/\rho}} \right) \quad (1)$$

Výraz pod odmocninou je dle zadání vždy kladný, přesto tento vztah neplatí pro libovolné  $h$ . Na začátku, když je  $h$  velké, je moment síly gravitační větší než moment síly vztlakové, proto je poloha  $\alpha = 0$  stabilní pro  $h \in \langle l\sqrt{1 - \rho_1/\rho}; l \rangle$ , a pro  $h \in \langle 0; l\sqrt{1 - \rho_1/\rho} \rangle$  platí vztah (1).

**Ladislav Michnovič**

#### Úloha IV.4 ... zima a léto (4 body, řešilo 46 studentů)

Spočtete, o kolik procent se bude lišit teplota na Zemi v periheliu, kdy je Země od Slunce vzdálena  $r$ , od teploty v aféliu, kdy je vzdálenost Země-Slunce  $r(1 + \varepsilon)$  nepatrně větší. Předpokládejte, že Země je dokonale černé těleso a v každém okamžiku je v rovnováze s okolím. Celkový vyzářený výkon je úměrný  $\sigma T^4$ .

Řešení byla převážně správná, což vypovídá o jednoduchosti úlohy, nebo o zdatnosti řešitelů. Ať je to jakkoliv, dovoluji mi to uvést vzorové řešení poměrně stručně.

Ze zadání budeme předpokládat, že Země je absolutně černé těleso v rovnováze s okolím. Tedy že vyzařuje stejné množství energie, jako přijímá. Vyjdu ze Stefan-Bolzmannova zákona  $M_e = \sigma T^4$ , který charakterizuje intenzitu tepelného záření černého tělesa ( $\sigma$  je Stefan-Bolzmannova konstanta a  $T$  je termodynamická teplota černého tělesa).

Země svým povrchem vyzáří za jednotku času výkon  $M_e S$ , kde povrch Země  $S = 4\pi R_z^2$ . Zároveň přijme za jednotku času od Slunce tepelný výkon  $P \cdot (\pi R_z^2)/(4\pi r^2)$ , kde  $P$  je zářivý výkon Slunce,  $R_z$  je poloměr Země a  $r$  je vzdálenost Země od Slunce. Tento vztah tedy udává jaká část tepelného výkonu Slunce připadne na Zemi.

Z rovnosti výše uvedených tepelných výkonů za jednotku času si vyjádřím  $M_e$  a dosadím jej do Stefan-Bolzmannova zákona, odkud pro  $T$  dostanu vztah:

$$T = \sqrt[4]{\frac{P}{16\pi\sigma r^2}} \quad (2)$$

Dále si přepíšu vzdálenosti Země od Slunce pomocí délky hlavní poloosy oběžné dráhy Země  $a$  a numerické excentricity  $e$  (kterou mohu nalézt (narozdíl od  $\varepsilon$ ) v tabulkách) jako

$$r = r_p = a(1 - e) \quad \text{a} \quad r(1 + \varepsilon) = r_a = a(1 + e).$$

Označím-li  $T_p$  ( $T_a$ ) teplotu na povrchu Země v periheliu (aféliu) a dosadím za  $r$  do (2), dostanu již požadovanou teplotní odchylku  $\Delta T$ , kterou si ještě upravím tak, aby mi vyšla v procentech:

$$\Delta T = \left( 1 - \frac{T_a}{T_p} \right) \cdot 100 \% = \left( 1 - \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \right) \cdot 100 \% \doteq e \cdot 100 \%$$

Pro tabulkovou hodnotu  $e = 0,01671$  dostanu hodnotu  $\Delta T = 1,6\%$ ; vyjádříme-li  $\Delta T$  pomocí  $\varepsilon$ , vyjde  $\varepsilon/2 \cdot 100 \%$ .

**Libor Sedláček**

**Úloha IV . P ... v balóně** (5 bodů, řešilo 37 studentů)

Vzduch v horkovzdušném balónu je zahříván konstantním příkonem, aby se vyrovnaly tepelné ztráty a balón letěl stále ve stejné výšce. Průměrná teplota vzduchu v balónu je  $t = 57^\circ\text{C}$ , teplota okolního vzduchu je  $t_0 = 17^\circ\text{C}$ . Tlak vzduchu v balónu je roven okolnímu tlaku. Pokud zvýšíme příkon hořáku tak, aby teplota v balónu vzrostla o  $\Delta t = 0,1^\circ\text{C}$ , o kolik se změní výška letu balónu?

Označme  $m_z$  celkovou hmotnost balónu (bez vzduchu),  $V$  celkový objem balónu,  $\varrho$  hustotu okolního vzduchu a  $\varrho_b$  hustotu horkého vzduchu v balónu. Objem horkého vzduchu v balónu je prakticky roven  $V$ . Pro výslednou sílu  $F$ , která působí na balón, potom platí (považujeme-li směr nahoru za kladný):

$$F = (\varrho - \varrho_b) Vg - m_z g \quad (3)$$

Teplota  $T'$  okolního vzduchu v troposféře závisí lineárně na výšce  $h$ :  $T' = T_0 + ah$ , kde  $a = -6,5 \text{ mK m}^{-1}$ . Teplotu horkého vzduchu v balónu označme  $T$ . Tlak  $p$  okolního vzduchu je stejný jako tlak horkého vzduchu. Hustoty  $\varrho$  a  $\varrho_b$  vyjádříme pomocí stavové rovnice ideálního plynu následovně:

$$\varrho = \frac{pM_m}{R_m T'} \quad \varrho_b = \frac{pM_m}{R_m T} \quad (4)$$

Protože hmotnost  $m_z$  je během letu prakticky stálá, je pro rovnovážné polohy balónu rozdíl  $\varrho - \varrho_b$  konstantní. Změní-li se tedy teplota  $T$  o  $\Delta t$ , potom se výška  $h$  změní o  $\Delta h$  a platí:

$$\frac{pM_m}{R_m T'} - \frac{pM_m}{R_m T} = \frac{(p + \Delta p) M_m}{R_m (T' + a\Delta h)} - \frac{(p + \Delta p) M_m}{R_m (T + \Delta t)} \quad (5)$$

Pro malé změny výšky  $h$  lze změnu tlaku  $\Delta p$  vyjádřit jako  $-\varrho g \Delta h = -\frac{pM_m}{R_m T'} g \Delta h$ . Dosadíme-li toto vyjádření změny tlaku do rovnice (5), pak získáme vztah:

$$\frac{1}{T'} - \frac{1}{T} = \left(1 - \frac{M_m g \Delta h}{R_m T'}\right) \left(\frac{1}{T' + a\Delta h} - \frac{1}{T + \Delta t}\right)$$

Úpravami tohoto vztahu a zanedbáním členů obsahujících součin dvou diferencí ( $\Delta t$  a  $\Delta h$  jsou malé) dostaneme:

$$\Delta h = \frac{T'^2 \Delta t}{\frac{M_m g}{R_m} T (T - T') + a T^2} \quad (6)$$

Po dosazení konkrétních hodnot do vztahu (6) dostaneme, že  $\Delta h = -33 \text{ m}$ . To je však poněkud divné. Vztah (6) není zcela správný. Uvedený vzorec totiž popisuje, jak se mění výška rovnovážné polohy balónu se změnou teploty vzduchu, který je v něm obsažen. Podíváme-li se však na vztah (3), potom zjistíme, že při ohřátí vzduchu v balónu se balón začne vždy pohybovat směrem nahoru. V našem případě je to však směrem od rovnovážné polohy - to znamená, že balón je v labilní poloze. Kde se tedy balón zastaví a za jakých podmínek lze užít vztah (6)?

Má-li být původní poloha stabilní, potom výraz  $\varrho - \varrho_b$  musí s rostoucí výškou klesat. Hustoty  $\varrho$  a  $\varrho_b$  jsou závislé na tlaku  $p$ , který závisí na výšce  $h$ . Pro závislost tlaku  $p$  okolního vzduchu na výšce  $h$  lze odvodit vzorec:

$$p = p_0 \left(1 + \frac{ah}{T_0}\right)^{-\frac{M_m g}{R_m a}}$$

Dosadíme-li předcházející výraz za tlak  $p$  do vztahů (4), potom derivací zjistíme, že podmínka poklesu  $\varrho - \varrho_b$  s růstem  $h$  je ekvivalentní s nerovností:

$$\frac{T'}{T} < 1 + \frac{R_m a}{M_m g} \quad (7)$$

V případě stabilní polohy lze pro výpočet změny výšky použít vztah (6). V tomto případě se balón chová tak, jak bychom očekávali ( $\frac{\Delta h}{\Delta t} > 0$ ).

Co se však stane s balónem, jehož parametry odpovídají zadání úlohy? Budeme-li stále udržovat konstantní teplotu  $T$ , potom od jisté výšky  $h$  začne vztah (7) platit. To znamená, že od této výšky začne být rozdíl  $\rho - \rho_b$  klesající. Nejspíše tedy bude existovat nějaká stabilní rovnovážná poloha balónu nad touto výškou. Pro hodnoty  $T_0 = 293 \text{ K}$   $p_0 = 0,1 \text{ MPa}$  vychází, že se balón ustálí ve výšce  $h = 8280 \text{ m}$ . Takto to však dopadne pouze v ideálním případě. Skutečná závislost  $T'$  na  $h$  není obecně lineární a mohou tedy existovat oblasti, kde  $T'$  klesá pomaleji s rostoucí výškou popř. i roste. Mohlo by se tedy stát, že by se balón ustálil v nějaké takové oblasti. Balón také může začít nezadržitelně padat k zemi, neboť je v labilní poloze. K tomu stačí pouze malý pokles teploty  $T$  horkého vzduchu.

*Karel Kolář*

#### Úloha IV. Exp ... pružnost a pevnost (8 bodů, řešilo 50 studentů)

Sežeňte si tenké gumičky a

- změřte závislost protažení gumičky na působící síle a sestrojte graf naměřené závislosti,
- změřte také sílu, při které gumička praskne,
- zatižte gumičku co nejvíce (ale tak, aby se nepřetrhla) a po sundání zátěže proveďte znovu měření a).

Teorie úlohy:

Nejprve si řekněme něco o deformačních vlastnostech gumy a jí podobných materiálů. Řadí se mezi tzv. nelineárně elastické látky, což znamená, že jejich deformační prodloužení nejsou

Tabulka 1.

$m$ [g]	prodloužení [mm]	
	nezatížená	zatížená
10	0	0
20	3,6	10,4
30	18,3	
40	36,1	48,3
50	62,6	
60	85,6	105,6
70	108,6	
80	130,6	158
90	165,7	
100	189,6	204,2
110	210,1	
120	217,3	240,1
130	229,2	
140	239,2	252,5
150	248,1	
160	255,4	266,8
170	262,3	
180	268,2	279,3
190	273,7	
200	279,5	288,2
210	277	
220	290	296,1
230	293,3	
240	298	304,3
250	301,9	309,1

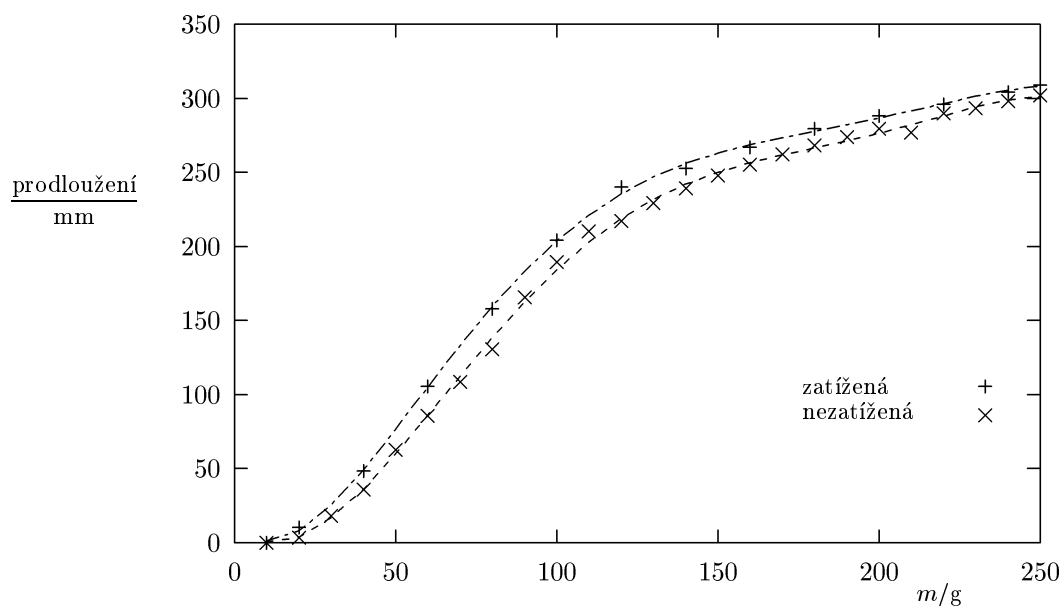
úměrná tahovému napětí a že po deformaci zaujímají tvar a velikost, jakou měly před ní. To ovšem neznamená, že se několikanásobnou deformací nezmění závislost deformace-tahová síla, jak jsme se mohli přesvědčit opakovaným měřením na jedné gumičce. Rozhodně nemůžeme očekávat lineární chování, které se objevuje především u kovů ve formě Hookova zákona, dalším rozdílem je například značná proměnnost průřezu gumičky, která při možném natažení až na sedminásobek původní délky příslušně zmenší průřez (neboť objem zůstává přibližně zachován). Jeden z hlavních problémů se týkal upevnění gumičky tak, aby se později nepřetrhla ve spoji, neproklouzla držákem a podobně. Většinou jste realizovali fixaci do svorek, pevný uzlík, v úvahu snad připadalo i lepidlo. Gumičku můžeme jako kruhovou smyčku zaklesnout například za hřebík a vynášenou sílu pak dělit dvěma. Pokud bylo nutné gumičku rozpojit, pak nejvhodnějším místem je zřejmě svár, neboť má jiné vlastnosti než zbytek gumičky. Neškodilo též uvést její parametry (tvar průřezu, délka).

Objevily se dva základní způsoby uspořádání: Na svisle upevněnou gumičku přidáváme závaží nebo ji napínáme siloměrem (třeba i ve vodorovné poloze). Většina z vás si pro představu provedla zkušební měření, aby zjistila obor zatížení gumičky. Výhodnější než používání závaží se ukázalo zatížení regulovat plynule, například doléváním vody. Mnohem přesněji tak určíme i okamžik přetržení.

V každém případě je nutné měnit hmotnost opatrně, aby nedošlo k rozkmitání soustavy. V blízkosti kritického bodu by na gumičku působilo kromě tíhy i zrychlení síly pružnosti a gumička by se přetrhla dříve. Rozhodně nesmíme v průběhu měření gumičku na chvíli odtížit a pak pokračo-

vat v měření závislosti. Mnohým pak vyšel na grafech docela hezký skok — parametry soustavy se změnila a přiblížily se druhé závislosti. K proměření charakteristiky již deformované gumičky neškodilo ji trochu „vytáhnout“, mohli jsme se však spokojit i s působením předchozího měření.

Samotné prodloužení můžeme odečítat na paralelně umístěné stupnici sledováním značky na gumičce (tenký fix) nebo jazýčku umístěného na misce se závažím. Značka na gumičce má však tu nepříjemnou vlastnost, že se zvětšuje.



V našem měření jsme gumičku pevně přivázali tak, aby uzel nepřispíval k celkovému prodloužení, které jsme měřili na katetometru, což je v podstatě dalekohled s libelou upevněný na svislé stupnici, v jehož zorném poli byl záměrný kříž, kterým jsme sledovali značku na gumičce. Jeho teoretická přesnost byla 0,1 mm, ovšem vzhledem k otřesům okolí ji odhadujeme na 1 mm. Samozřejmě nemá smysl měřit protažení volné gumičky, neboť je zprohýbaná. Narovnali jsme si ji malým závažím a tento stav jsme brali jako výchozí. Můžeme uvažovat o zanedbání chyb v určení hmotnosti závaží vzhledem k odečítání na stupnici. Závaží jsme přidávali po 10 g na rozsahu 10–250 g. Problémem bylo mimo jiné určení klidové polohy při měření již deformované gumičky, které bylo ztíženo jejím dopružováním. Výsledky prezentujeme formou grafu závislosti relativního prodloužení na napínací síle. V blízkosti nuly můžeme přibližně hovořit o lineárním chování, dále křivka některým připomínala odmocninu. Deformace se zde mění v čase bez přiloženého napětí.

Mezní tahové síly jsme změřili pro 3 stejné gumičky. Hrubou hodnotu jsme stanovili na 0,5 kg, přesněji pak 0,65 kg. Jednalo se však o gumičky již deformované, třetí nepoužitá vydržela až 0,9 kg! Poznámky ke grafické závislosti: Není vhodné spojovat body úsečkami (nezískáme tak žádnou další informaci), lepší je proložení křivky tak, aby body okolo ní byly rozmístěny rovnoměrně. Dobrý nápadem se též ukázalo změřit bod přetržení gumičky před a po deformaci, hodnota mezní síly se zmenší. Gumička se přetrhne v místě nějaké vady či v nejtenčím místě, kdyby byla kvalitní, přetrhla by se asi mnohem později. Někteří dokonce průběžně měřili průřez a pak mohli prodloužení vynášet v závislosti na tahovém napětí. Děkujeme (mimo jiné) Martinu Macáškovvi za zaslání gumičky, které jsme s radostí proměřili.

Závěr: Jak je vidět z vykresleného grafu, závislost deformace-tahová síla opravdu není lineární. Dále pozorujeme, že gumička už v minulosti deformovaná vykazuje menší tuhost než gumička deformovaná poprvé, lépe se natahuje.

*Jiří Kvita & Michal Bittner*

#### Úloha S.IV ... F-P rezonátor a lasery (6 bodů, řešilo 28 studentů)

a) Představte si Fabry-Perotův rezonátor se vzdáleností jednotlivých odrazných ploch  $d = 3 \text{ mm}$ , vyrobený ze skla o indexu lomu  $n = 1,5$ . Pro jakou nejbližší vlnovou délku  $k$  500 nm dojde k maximální odrazivosti rezonátoru?

b) Uvažujte F-P rezonátor z příkladu a), na nějž dopadá světlo kolmo. Kam se bude posouvat maximum z předchozího příkladu, jestliže budeme rezonátor postupně naklánět vůči směru paprsku o malý úhel  $\alpha$ ?

c) Jakou teoreticky maximální účinnost přeměny čerpané energie lze dosáhnout u titan-safírového laseru, který svítí na vlnové délce 800 nm, jestliže ho čerpáme argonovým laserem a použijeme čerpací vlnovou délku 515 nm.

d) Jak daleko (ve frekvenční oblasti) jsou od sebe jednotlivé módy v argonovém laseru s laserovým rezonátorem o délce 1,5 m, resp. v polovodičovém laseru s délkou rezonátoru 0,3 mm. Většina plynů má index lomu blízký jedné, polovodiče mají index lomu poměrně velký, obvykle kolem 3.

a) Zde vystačíme pouze s interferencí paprsků v rezonátoru. Při maximální odrazivosti rezonátoru dochází k destruktivní interferenci, pro kterou platí

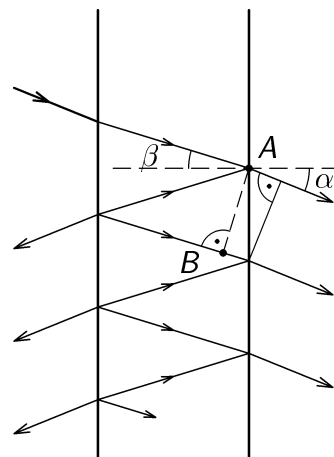
$$\delta = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$$

Ze seriálu víme, že pro fázi platí

$$\delta = \frac{2\pi nd}{\lambda_0}$$

Výsledný vztah pro vlnovou délku je tedy  $\lambda_0 = \frac{4nd}{2k+1}$ . Nejbližší vlnové délky, při nichž dochází k maximální odrazivosti rezonátoru jsou pro  $k_1 = 17999$  a  $k_2 = 18000$ . Vlnové délky tedy jsou  $\lambda_1 = 500,014$  nm a  $\lambda_2 = 499,986$  nm.

b) V případě šikmého dopadu je rozdíl fází paprsků vystupujících z rezonátoru (viz obr. 5)



Obr. 5

$$\delta = \frac{2\pi nd \cos \beta}{\lambda_0}$$

Musíme vzít rozdíl fází mezi místy A a B, které se nacházejí na jedné vlnoploše. Jednoduchý postup, jak určit rozdíl optické dráhy  $\Delta$  je na obr. 6.

$$\Delta = 2h \cos \beta$$

Ze Snellova zákona dosadíme za  $\cos \beta$ . Výsledný vztah pro maximum odrazivosti

$$\lambda_0 = \frac{4nd \cos \beta}{2k + 1} = \frac{4d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{2k + 1}$$

c) Z jednoho čerpacího fotonu může vzniknout maximálně jeden foton výstupní. Účinnost tedy vypočítáme jako poměr energií obu fotonů

$$\eta = \frac{E_{\text{výstupní}}}{E_{\text{čerpací}}} = \frac{\frac{hc}{\lambda_{\text{výstupní}}}}{\frac{hc}{\lambda_{\text{čerpací}}}} = \frac{\lambda_{\text{čerpací}}}{\lambda_{\text{výstupní}}} \doteq 0,64$$

Maximální teoretická účinnost čerpání laseru je 64%. Tak vysoká účinnost se však nikde nedosahuje, protože v laseru probíhá mnoho procesů, které brání tomu, aby se všechny čerpací fotony proměnily ve fotony využitelné na výstupu laseru.

d) Ze vztahu (6) z předminulého dílu seriálu známe podmínky pro maximum. Pro dvě nejbližší maxima platí

$$\lambda_1 = \frac{2nd}{k}, \quad \lambda_2 = \frac{2nd}{k+1}$$

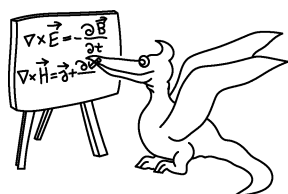


Stačí jen dosadit do vztahu mezi frekvencí a vlnovou délkou  $f = \frac{c}{\lambda}$  a dostáváme

$$\Delta f = f_1 - f_2 = c \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = \frac{c}{2nd}$$

Pro argonový laser je  $\Delta f = 100$  MHz a pro polovodičový laser je rozdíl frekvencí modů asi  $\Delta f = 170$  GHz. Pro porovnání, frekvence světla s vlnovou délkou  $\lambda = 800$  nm je  $3,75 \cdot 10^{14}$  Hz. Tedy jednotlivé mody mají vzájemný frekvenční rozdíl přibližně 100 000-krát menší, než je hlavní frekvence.

Ondřej Pejchal & Jan Hradil



## Seriál na pokračování

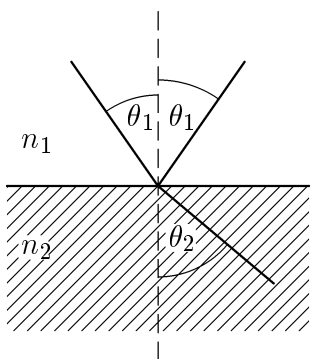
### Optické vlnovody a optická vlákna

V tomto díle seriálu ukážeme, jak funguje optické vlákno, proč by asi nefungoval vlnovod ze zrcadel. Také spočítáme, kolik informace se může přenášet optickým vláknem, a také si ukážeme, jak ušetřit za ponorku potřebnou na opravy podmořské elektroniky.

Někdy potřebujeme přivést světlo od světelného zdroje někam jinam. Pokud je mezi zdrojem a místem, kde světlo potřebujeme přímá cesta, je díky přímočarému šíření světla vše jednoduché. Někdy však cesta není přímá a my potřebujeme světlo několikrát ohnout, aby se dostalo tam kam má. S takovým problémem se setkali např. lékaři, když se chtěli podívat na nepřístupná místa lidského organismu (třeba do žaludku, když je zajímavé, jestli pacient trpí žaludečním vředem nebo je to jen hypochondr). Jednou z možností bylo vytvořit světlovod, který přivede světlo na místo a zpět přivede obraz zkoumaného místa.

Řešením tohoto problému je zrcadlový nebo čočkový vlnovod (obr. 7). Oba jsou vhodné pro přenos světla jen na krátké vzdálenosti, protože mají velké ztráty a kromě toho jsou mechanicky složité. Žádné zrcadlo nemá sto procentní odrazivost a i když má odrazivost např. 99 %, tak stačí 69 odrazů a intenzita světla klesne na polovinu ( $0,99^{69} \doteq 0,5$ ). Pro přenos světla na větší vzdálenosti jsou tyto světlovody nevhodné.

Úplný (totální) odraz světla na rozhraní dvou prostředí je k vedení světla ideální. Paprsky se opakovaně odrážejí aniž by docházelo k lomu a tak se neztrácí energie.



Obr. 8

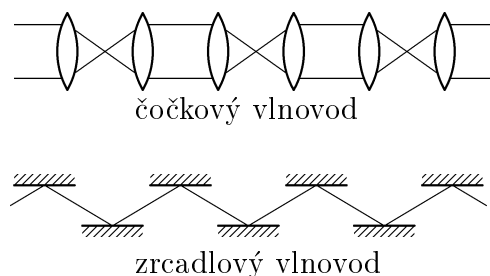
K totálnímu odrazu může dojít, pokud světlo dopadá z opticky hustšího prostředí pod velkým úhlem na rozhraní s opticky řidším prostředím. Napíšeme-li Snellův zákon v takovémto případě ( $n_1 > n_2$ )

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (8)$$

a přepíšeme jej do tvaru

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1,$$

můžeme si všimnout, že pokud je  $\sin \theta_1$  blízký 1 ( $\frac{n_1}{n_2} > 1$ ), tak by musel být  $\sin \theta_2$  větší než 1, což není možné splnit pro žádnou hodnotu  $\theta_2$ . Proto nemůže existovat žádný lomený paprsek v libovolném směru. Existuje pouze odražený paprsek, který nese všechnu energii dopadajícího paprsku.

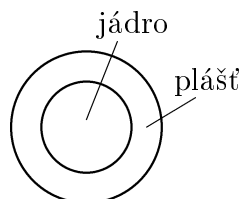


Obr. 7

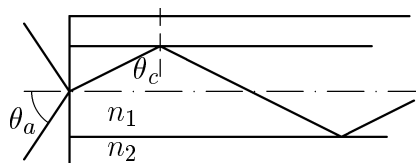
Minimální úhel, při kterém dochází k totálnímu odrazu se označuje jako kritický  $\theta_c$  a platí pro něj

$$\theta_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1}.$$

Pro větší úhly dopadu nastává totální odraz.



Obr. 9



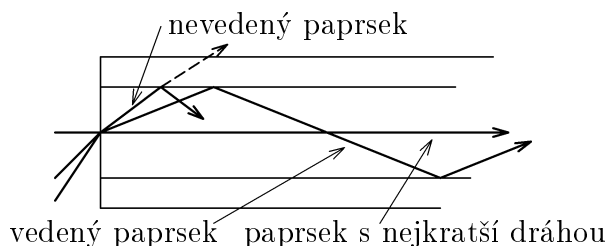
Obr. 10

V optickém vlákne se světlo šíří jen s využitím totálních odrazů. Samotné optické vlákno je velmi dlouhý válec, který má na průřezu dvě různé oblasti — jádro a plášť. V jádru, které je opticky hustší než plášť, se šíří samotné světlo a plášť slouží jako ochrana vlákna před vnějšími vlivy. Plášť není nezbytně nutný pro činnost vlákna, teoreticky by ke vzniku totálních odrazů stačilo umístit jádro vlákna do vzduchu, ale tak by docházelo k velkým ztrátám při vedení světla (obr. 11). Každá nečistota na povrchu by způsobovala vyvázání světla z vlákna a přenesený výkon by postupně klesal. Pokud je jádro obaleno pláštěm, nastávají totální odrazy na rozhraní jádro-plášť, které je stále dobře definováno a „nejde znečistit“.

Jak se šíří paprsky vláknem je znázorněno na obrázku 10. Všechny paprsky, které svírají s osou vlákna úhel menší než  $90^\circ - \theta_c$  se šíří vlákem, ostatní se po několika částečných odrazech utlumí (obr. 12). Jaký je maximální úhel, pod kterým má smysl svítit do vlákna? Z geometrických vztahů mezi úhly, ze Snellova zákona (8) a vztahu pro kritický úhel dostaneme vztah pro numerickou aperturu

$$NA = \sin \theta_a = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}.$$

Optická vlákna se většinou vyrábí tažením ze superčistého skla. Čistota je tak velká, že i přes několik kilometrů tlustý kus skla by bylo perfektně vidět. Klasické okenní sklo začíná být neprůhledné při tloušťce několika centimetrů (*pozn.: zkuste navštívit sklenářství a podívejte se přes vrstvu několika skel. Uvidíte i spoustu dalších zajímavých efektů.*)



Obr. 12

Změny indexu lomu mezi jádrem a pláštěm bývá dosaženo malou příměsí titanu, germania nebo bóru do křemenného skla ještě před vlastním tažením. Příměs se do skla dostává obvykle difuzí při vyšší teplotě. Díky tomuto způsobu výroby není rozdíl mezi indexem lomu jádra a pláště příliš velký, zavádí se proto relativní změna indexu lomu  $\Delta$ , která udává poměr rozdílu indexů lomů a vlastní velikosti indexu lomu jako

$$\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1},$$

přičemž  $\Delta \ll 1$ . Obvyklé hodnoty indexu lomu u optických vláken jsou  $n = 1,44$  a  $\Delta = 0,001$  až  $0,02$ . Protože je  $\Delta$  relativně malé, můžeme upravit numerickou aperturu do tvaru

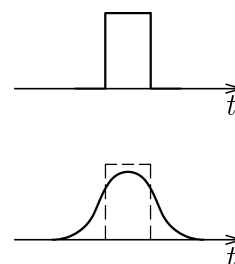
$$NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \approx n_1 \sqrt{2\Delta}.$$

Díky malému  $\Delta$  je numerická apertura relativně malá, ale to v principu nevadí, pokud se nám povede navázat světlo do vlákna vhodným způsobem. Někdy může být malá numerická apertura dokonce výhodou.

Ve vláknech pozorujeme při šíření světla modovou strukturu, podobně jako v laseru. Zatímco v laseru (viz minulé díly seriálu) jsme mluvili především o podélných modech, ve vláknech se jedná spíše o mody příčné. Vznik modů můžeme jednoduše vysvětlit kombinací představ geometrické a vlnové optiky. Představa paprsku znázorňuje šíření rovinné vlny vláknem a aby docházelo ke konstruktivní interferenci (analogicky jako v laseru), musí paprsek během jedné periody oběhu (tj. když se odrazí od „horní“ a „dolní“ strany vlákna a dostane se zase do „stejného“ výchozího stavu) získat vhodný fázový posun. Této podmínce pak vyhovuje několik různých směrů paprsků, které se šíří vláknem a nazýváme je jednotlivými mody. Množství modů, které se mohou šířit vláknem je závislé na  $n$ ,  $\Delta$  a na průměru jádra.

Co je podstatné u každého modu je rychlost, s jakou je schopen se šířit vláknem. Různé paprsky, které svírají různé úhly s osou vlákna mají různé dráhy a proto je jejich rychlost šíření ve směru různá. Ty, které se šíří hodně klikatě jsou pomalejší než ty, co se šíří rovně. Odborně se tomuto jevu říká modová disperze grupových rychlostí.

Právě disperze grupových rychlostí je nepříjemnou záležitostí v oblasti datových komunikací. Omezuje množství informace, kterou jsme schopni přenést optickým vláknem za jednotku času. Informace se po optickém kabelu přenáší jako světelný signál. Buď je tam světlo nebo tma. Řekněme, že pošleme do optického vlákna obdélníkový puls (obr. 13). Co se s ním stane po průchodu vláknem? Po průchodu to již nebude puls s ostrými hranicemi, ale rozplizlý a široký puls. Je to tím, že energie pulsu se rozdělila mezi mody, které ji přenesly na druhý konec vlákna, ale díky rozdílné modové rychlosti se dostala na druhou stranu v různých časech a výstupní puls je v čase široký. Jeho začátek tvoří energie z modů s velkou rychlostí, na konci je energie, kterou přinesly mody s malou rychlostí. Kdyby byl vstupní puls nekonečně krátký, na výstupu bychom dostali signál o délce



Obr. 13

$$\Delta t = \frac{s}{v_{\min}} - \frac{s}{v_{\max}},$$

kde  $v_{\min}$  a  $v_{\max}$  jsou rychlosti nejrychlejších a nejpomalejších modů. Abychom jednotlivé pulsy na výstupu odlišili, tak musí být od sebe vzdáleny nejméně tak daleko, o kolik se rozšíří během průchodu vláknem.

Modovou disperzi grupových rychlostí je možné různými metodami různě eliminovat. Jednou z možností je použití speciálního profilu indexu lomu v jádře vlákna. Vlákna o kterých jste zatím mluvili mají index lomu v celém průřezu vlákna stejný, který se mění skokem na hranici jádra a pláště. Takovýmto vláknům se říká vlákna se skokovým indexem lomu. Všechny paprsky se šíří stejnou rychlostí (stejný index lomu), ale po různých drahách. Pokud vyrobíme vlákno, které bude mít největší index lomu uprostřed a nejmenší na krajích, paprsky s dlouhou dráhou se budou šířit rychleji a celková rychlost modů se vyrovná. Takovýmto vláknům se říká vlákna s gradientním indexem lomu.

Druhou z možností je použít tzv. jednomodová vlákna. Jednomodové vlákno je takové vlákno, které je dostatečně tenké, aby se jím mohl šířit jen jediný mod. Protože je mod jen jeden, je mezimodová disperze potlačena.

Když se podařilo vyrobit první jednomodová vlákna, ukázalo se, že na disperzi mají vliv i další jevy. Z teorie plyne, že v čase konečný puls má i ve frekvenční oblasti konečnou šířku. A protože index lomu (a tedy i rychlost světla ve vláknech) je závislý na vlnové délce, bude se každá vlnová délka (barva) šířit jinou rychlostí a přibude další zdroj disperze.

Nejnovější metodou na potlačení disperze jsou tzv. solitonová vlákna, ve kterých se šíří optický puls ve formě solitonu a díky nelineárním efektům se přesně zachovává jeho tvar, takže se jeho délka v čase téměř nemění.

Nutno konstatovat, že rychlost komunikace po optických kabelech zatím není omezena samotným vláknem, ale rychlostí elektroniky, která musí být na obou stranách vlákna — jednou jako

zdroj signálu a na druhé straně jako detektor a zpracovatel signálu. Jestliže se podaří vyvinout celooptické počítače, tak padne i tato překážka a komunikační rychlost zase dramaticky vzroste.

Zmínili jsme, že optická vlákna se vyrábějí ze superčistého skla. Ale i takové sklo má jistý útlum a i díky nehomogenitám dochází ke ztrátám energie. Při přenosu na krátké vzdálenosti (např. v rámci města) to nevadí, ale pro datové přenosy pod oceánem je třeba kabel doplnit tzv. opakovači. Opakovač je věc, která přijme optický signál, zesílí jej a zesílený jej pošle dál. První opakovače převedly optický signál na elektrický, ten zesílily a opět jej převedly na optický a ten poslaly dále. Problém je v tom, že opakovače musí být umístěny uprostřed oceánu a proto je každá jejich oprava velmi nákladná. Opticko-elektricko-optický opakovač je relativně složitá záležitost a tedy i poruchová věc.

Celou složitou elektronickou věc jde nahradit jednoduchým laserovým zesilovačem. Stejně tak, jako je v laseru aktivní prostředí, které zesiluje procházející světlo, tak se kousek vlákna upraví, aby bylo schopno také zesilovat světlo. Úprava spočívá v tom, že se krátký úsek dopuje např. erbiem. Aby se aktivní prostředí chovalo jako zesilovač, musí se mu dodávat energie, musí se tedy na dopovanou část vlákna svítit, což obstará několik svítivých diod. Tak je opakovač mnohem méně poruchový a ušetří se za opravy.

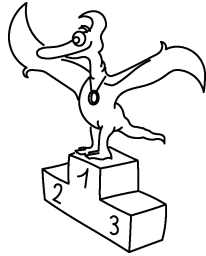
### Úloha VI.S ... *optická vlákna*

a) Jak velká je vstupní numerická apertura u vlákna s gradientním indexem lomu  $n = 1,452$  a relativní změnou indexu lomu  $\Delta = 0,01$ .

b) Jak dlouhý signál dostaneme na výstupu z optického vlákna s parametry z části a) o délce 100 km, jestliže dáme na vstup signál dlouhý  $1 \mu\text{s}$ ? K výpočtům použijte nastíněného geometrického modelu.

c) Jakou maximální přenosovou kapacitu (v bytech/s) můžeme na tomto vlákně provozovat? Předpokládejte, že přenesení jednoho bitu znamená přenést jeden impuls.

Naše adresa: **FYKOS, KTF MFF UK**  
**V Holešovičkách 2, 180 00 Praha 8**  
<http://www.mff.cuni.cz/news/fks>



# Pořadí řešitelů po IV. sérii



## Kategorie čtvrtých ročníků

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	5	6	S4	IV	Body
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>4</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>8</i>	<i>6</i>	<i>34</i>	<i>136</i>
1	Daniel	Sprinzel	4.	G Dačice	3	3	4	4	4	5	5	28	98
2	Lenka	Zdeborová	4.A	G Plzeň	3	4	4	4	5	8	4	32	93
3	Petr	Klenka	oktáva A	G Praha 10	2	3	3	3	1	5	2	19	84
4	Filip	Křížek	oktáva A	G Praha	3	3	4	2	1	2	4	19	73
5	Tomáš	Pecháček	4.P	MSŠCH	—	4	1	3	—	2	3	13	66
6	Jan	Janský	septima	G Strakonice	3	3	1	3	—	—	—	10	60
7	Jiří	Samek	kvinta	G Semily	3	3	4	3	—	1	3	17	58
8	Jan	Mysliveček	4.A	G Brno - Jaroška	—	—	—	—	—	—	—	0	54
9	Miroslav	Musil	septima A	G N. Město na M.	3	3	2	3	—	3	1	15	52
10	Robert	Vácha	4.A	G Jihlava	3	3	2	1	1	2	—	12	51
11	Vít	Marek	4.A	G Holešov	—	—	—	—	—	—	—	0	48
12	Miroslav	Černý	septima	G K. Hora	3	3	4	2	—	—	3	15	47
13	Michal	Šitina	4.B	G Hr. Králové	—	—	—	—	—	—	—	0	42
14 - 15	Michal	Fašina	septima		3	3	—	4	—	3	—	13	30
14 - 15	Libor	Novák			—	—	—	—	—	—	—	0	30
16	Karel	Honzl		G Podbořany	—	—	—	—	—	—	—	0	28
17	Josef	Hala			—	—	—	—	—	—	—	0	27
18	Lukáš	Poul	4.A	G Brno	—	—	—	—	—	—	—	0	26
19	Lukáš	Uhl	4.A	G Brno-Víd.	—	—	—	—	—	—	—	0	21
20	Jan	Holeček	4.A	G Brno - Jaroška	—	—	—	—	—	—	—	0	19
21 - 22	Ondřej	Příbyla	4.A	G Brno - Jaroška	—	—	—	—	—	—	—	0	16
21 - 22	Daniel	Vostřel	septima	G Litomyšl	—	—	—	—	—	—	—	0	16
23	Ivo	Chvojka			3	—	—	—	—	3	—	6	13
24	Karel	Jelínek	E4.B	SPS Ostrov	—	—	—	—	—	—	—	0	11
25	Rostislav	Štaubr			—	—	—	—	—	—	—	0	10
26 - 27	Petr	Virostko	4.A	G Frýdek-Místek	—	—	—	—	—	—	—	0	9
26 - 27	Petr	Zasche	septima	G Jablonec n. N.	—	—	—	—	—	—	—	0	9
28 - 31	Jiří	Dvořáček	4.A	G Brno - Jaroška	—	—	—	—	—	—	—	0	8
28 - 31	Ondřej	Kafka	sexta	G Semily	—	—	—	—	—	—	—	0	8
28 - 31	Karel	Řezba	septima A	G Beroun	3	3	2	—	—	—	—	8	8
28 - 31	Petr	Švec	4.	G Kadaň	—	—	—	—	—	—	—	0	8
32	Martin	Nečaský		G Semily	3	2	2	—	—	—	—	7	7
33 - 34	Martina	Gřondilová	A	G Hr. Králové	—	3	3	—	—	—	—	6	6
33 - 34	Radomír	Vaniček			3	—	—	—	—	2	—	5	6
35 - 36	Jakub	Holovský			—	—	—	—	—	—	—	0	5
35 - 36	Vlastimil	Kubíček	septima A	G Beroun	3	—	2	0	—	—	—	5	5
37	Marie	Kuncová	4.A	G Blansko	—	—	—	—	—	—	—	0	4
38 - 39	Pavel	Kolář			—	—	—	—	—	—	—	0	3
38 - 39	Karel	Müller	6.A		3	—	—	—	—	—	—	3	3
40	Jiří	Burda			—	—	—	—	—	—	—	0	2
41	Petr	Forgács	sexta B	G Most	—	—	—	—	—	—	—	0	0

## Kategorie třetích ročníků

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	5	6	S4	IV	Body
	<i>Student</i>	<i>Pitný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>4</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>8</i>	<i>6</i>	<i>34</i>	<i>136</i>
1	Jan	Houštěk	sexta	G Pelhřimov	3	4	3	4	5	10	6	35	140
2	Milan	Berta	III.A	G Velké Kapušany	3	3	4	3	4	10	3	30	101
3	Karel	Kouřil	kvinta B	G Blansko	4	4	4	3	3	4	3	25	90
4	Juraj	Suchár	3.	G Dubnica n. Váhom	3	3	3	4	—	4	2	19	78
5	Miroslav	Pištek	sexta	G Sedlčany	3	4	4	4	4	3	4	26	74
6	Tomáš	Linhart	sexta	GOA Sedlčany	3	4	3	4	2	5	3	24	69
7	Pavel	Augustinský	sexta B	G Havířov	3	4	4	4	5	5	5	30	67
8	Jakub	Kulaviak	kvinta B	G Blansko	3	3	3	3	—	4	—	16	61
9	Stanislav	Hampl	sexta	GOA Sedlčany	3	0	1	3	—	6	0	13	50
10	Tomáš	Matoušek	VI.C	G Karlovy Vary	3	3	4	3	2	3	2	20	49
11	Jan	Houfek	sexta	G Uh. Hradiště	—	—	—	—	—	—	—	0	48
12	Lenka	Knopová	5.M	G Pardubice	3	1	2	1	—	—	2	9	42
13 - 15	Ondřej	Souček	3.	G Jablonec	3	3	3	—	4	—	—	13	35
13 - 15	Petr	Schimm	VI.C	G Karlovy Vary	3	—	—	2	0	2	—	7	35
13 - 15	Jan	Kulveit	VIA	G Praha 8	3	3	4	3	3	—	3	19	35
16	Martin	Kozák	sexta A	G Klatovy	3	3	3	—	—	—	—	9	31
17 - 18	Martin	Soška	sexta	G Uh. Hradiště	3	—	2	—	—	—	—	5	29
17 - 18	Klára	Maturová	sexta	G Tanvald	3	—	—	—	—	2	—	5	29
19 - 20	Zbyněk	Šrubař	sexta A	G Frenštát p. R.	3	3	3	—	—	1	—	10	28
19 - 20	František	Kolář	kvinta	G Praha 5	3	3	3	—	—	—	—	9	28
21	Daniel	Fiala	5.B	G Sušice	—	—	—	—	—	—	—	0	27
22	Miroslav	Bačák	sexta	G Pelhřimov	3	4	—	—	—	3	—	10	26
23	Petr	Nachtigall	sexta A	G Frenštát p. R.	3	—	2	—	—	—	—	5	22
24	Kateřina	Šetková	sexta B	G Klatovy	—	—	—	—	—	—	—	0	20
25	Jiří	Vábek	sexta	G Žďár n. Sáz.	—	—	—	—	—	—	—	0	19
26	David	Šumský	3.B	G Třinec	—	—	—	—	—	—	—	0	18
27	Jan	Novotný	sexta	G Mělník	—	3	—	4	1	3	—	11	14
28 - 29	Jiří	Svoboda	7.A	G Praha 9	—	—	—	—	—	—	—	0	13
28 - 29	Kristina	Rochová	sexta A	G Frenštát p. R.	—	—	—	—	—	—	—	0	13
30	Jana	Váchová	6.	G Tábor	—	—	—	—	—	—	—	0	12
31 - 32	Petr	Veselý	5.F	G Č. Budějovice	—	—	—	—	—	—	—	0	11
31 - 32	Pavel	Borovička	III.T	G Opatov	—	—	—	—	—	—	—	0	11
33	Miroslav	Vyčítal	3.A	G Rychnov n. K.	3	—	—	—	1	—	—	4	10
34 - 35	Marek	Libra	sexta	G Žďár n. Sáz.	—	—	—	—	—	—	—	0	8
34 - 35	Jiří	Bočan	sexta		—	—	—	—	—	—	—	0	8
36	Lubor	Kleveta	sexta	G Uh. Hradiště	—	—	—	—	—	—	—	0	7
37	Václav	Lederer	sexta	G Vítkov	—	—	—	—	—	—	—	0	6
38 - 39	Slavomír	Miškovec	3.A	G Poprad	—	—	—	—	—	—	—	0	5
38 - 39	Martin	Macášek	3.		3	—	—	—	—	2	—	5	5
40	Tomáš	Kratochvíl	6.A	G Brno - Křenová	—	—	—	—	—	—	—	0	3
41	Lukáš	Rychnovský	kvinta B	G Blansko	—	—	—	—	—	—	—	0	0

## Kategorie druhých ročníků

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	5	6	S4	IV	Body
	<i>Student</i>	<i>Plný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>4</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>8</i>	<i>6</i>	<i>34</i>	<i>136</i>
1	Petr	Nečesal	IV.C	G M. Budějovice	3	3	5	4	4	8	5	32	109
2	Peter	Čendula	2.B	G Lipt. Mikuláš	3	2	3	2	4	8	5	27	104
3	Martin	Beránek	V.	G Praha 4	3	2	4	3		6	3	21	88
4	David	Kolovratník	2.E	SPŠS Chrudim	3	3	3	3	5	5	—	22	72
5	Jaromír	Chalupský	kvinta A	G Sušice	3	3	4	4	4	5	—	23	69
6	Ondřej	Plašil	2.B	G Praha 9	3	—	4	3	1	—	5	16	59
7	Michal	Škoda	kvinta B	G Turnov	3	—	—	3	—	4	—	10	51
8	Jan	Pšíkal	2.F	SPŠE Pardubice	3	3	—	4	1	6	1	18	48
9	Pavel	Janda	kvinta	G Telč	3	3	2	4	—	—	—	12	42
10	Jaroslav	Tykal	2.C	G Jihlava	2	3	3	—	—	2	—	10	39
11	Libor	Tomšík	2.F	SPŠE Plzeň	3	3	—	—	—	4	—	10	35
12	Radim	Krupička	2.B	G Žďár n. Sáz.	3	—	3	—	—	—	—	6	34
13	Jakub	Levic	kvinta B	G Louny	3	2	3	4	—	3	1	16	33
14	Pavel	Řezanka	2.C	G Praha 5	3	3	2	—	1	2	—	11	32
15 - 16	Jakub	Chaloupka	5.A	G Brno - Křenová	—	3	—	—	1	—	—	4	31
15 - 16	Jan	Alster	sexta A	G Holešov	3	3	2	—	2	—	—	10	31
17	Martin	Jakl	4.D	G Pardubice	3	2	1	3	—	—	—	9	30
18 - 19	Martin	Šimek	kvinta	G Telč	3	—	3	3	—	—	—	9	29
18 - 19	Jiří	Plachý	kvinta	G Uh. Hradiště	—	—	—	—	—	—	—	0	29
20 - 21	Michal	Tarana	2.B	G Žilina	3	—	2	—	—	—	0	5	28
20 - 21	Hedvika	Kadlecová	2.C	G Praha 2	—	—	—	—	—	—	—	0	28
22	Břetislav	Šopík	2.B	G Žďár n. Sáz.	3	0	3	—	—	—	—	6	24
23	Antonín	Karásek	2.	G Blansko	3	—	—	—	—	2	—	5	23
24	Dáša	Eisenmannová	2.A	G Praha 5	3	3	—	—	1	—	—	7	22
25 - 26	Marcel	Václavík	2.A	COP Hronov	—	—	—	—	0	3	—	3	17
25 - 26	Jan	Kratochvíl	2.K	SPŠ Praha	3	4	—	—	—	—	—	7	17
27 - 28	Jan	Pacák	kvinta		—	—	—	—	—	—	—	0	16
27 - 28	Adela	Grohořová	2.D	G Bardejov	2	1	—	—	—	—	—	3	16
29 - 30	Pavel	Veselý	2.A	G Kolín	3	0	—	—	—	—	—	3	15
29 - 30	Lukáš	Brázda	2.C	G Jihlava	3	—	3	—	—	—	—	6	15
31	Pavel	Braška	2.D	G Bílovec	—	—	—	—	—	—	—	0	14
32 - 33	Martina	Štykrová	S5.A	G K. Hora	—	3	—	—	—	—	—	3	13
32 - 33	Petr	Hřebovka	5.A	G Brno - Křenová	—	—	—	—	—	—	—	0	13
34 - 35	Jaroslav	Vácha	kvinta	G Příbram	—	—	—	—	—	—	—	0	12
34 - 35	Petra	Adamová	2.A	G Benešov	1	—	—	—	—	3	—	4	12
36 - 37	Vladimíra	Satrapová	2.	G Havl. Brod	—	—	—	—	—	—	—	0	11
36 - 37	Martin	Hejna	S2.A	SPŠE Dobruška	3	2	2	—	—	—	—	7	11
38 - 40	Pavol	Mikčo	2.B	G Stropkov	3	1	—	1	2	2	1	10	10
38 - 40	Radek	Macháň	2.B	G Liberec	—	—	—	—	—	—	—	0	10
38 - 40	Milan	Křápek	2.D	G Brno - Křenová	—	—	—	—	—	—	—	0	10
41 - 43	Norbert	Požár	6.A	G Bruntál	—	—	—	—	—	—	—	0	9
41 - 43	Lada	Plenerová	2.B	G Liberec	—	—	—	—	—	—	—	0	9
41 - 43	Vít	Gottwald	2.A	G Jičín	—	—	—	—	—	—	—	0	9
44 - 47	Jan	Zikán	2.E	G Praha Arab.	—	—	—	—	—	—	—	0	8
44 - 47	Pavel	Vraspír	kvinta	G Polička	1	1	0	—	—	—	—	2	8
44 - 47	Vojtěch	Štěpán	kvinta A		3	3	—	2	—	—	—	8	8
44 - 47	Tomáš	Brezula	2.B	G Přerov	—	—	—	—	—	—	—	0	8
48 - 49	Lukáš	Schmiedt	2.D	G Olomouc	—	—	—	—	—	—	—	0	6
48 - 49	Hana	Besedová	2.B	G Frenštát p. R.	—	—	—	—	—	—	—	0	6
50 - 52	Michaela	Volná	2.A	G Frýdek-Místek	—	—	—	—	—	—	—	0	5
50 - 52	Petr	Novotný	2.B	G Frýdek-Místek	—	—	—	—	—	—	—	0	5
50 - 52	Jiří	Doubek	2.G	G Praha Arab.	—	—	—	—	—	—	—	0	5
53 - 54	Pavel	Václavek	2.	G Frýdek-Místek	—	—	—	—	—	—	—	0	4
53 - 54	Petra	Hovorková	kvinta A	G Aš	3	1	—	—	—	—	—	4	4
55 - 56	František	Polanka	2.A	G Domažlice	—	—	—	—	—	—	—	0	3
55 - 56	Ondřej	Pánek	2.C	G Jihlava	—	—	—	—	—	—	—	0	3
57	Jan	Kodovský	sexta A	G Zlín	—	—	—	—	—	—	—	0	2
58	Martin	Marec	6.B	G Bruntál	—	—	—	—	—	—	—	0	1

*Kategorie prvních ročníků*

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	5	6	S4	IV	Body
	<i>Student</i>	<i>Plný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>4</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>8</i>	<i>6</i>	<i>34</i>	<i>136</i>
1	Michal	Bareš	kvarta A	G Plzeň	3	3	2	—	—	4	—	12	37
2	Matej	Dubový	1.B	G Trenčín	—	—	0	0	3	4	—	7	29
3	Ľuboš	Bednárik	1.F	G Trenčín	—	—	0	0	3	4	—	7	28
4	Zdeněk	Moravec	IX.C		3	2	2	4	2	3	—	16	16
5	Peter	Biras	1.F	G Trenčín	—	—	—	0	3	—	—	3	15
6	Miroslav	Šulc	kvarta B		3	3	2	—	1	3	1	13	13
7	Petr	Křístek	1.C	G Frýdek-Místek	—	—	—	—	—	1	—	1	12
8 - 9	Roman	Mendel	IX.A	ZŠ Trenčín	—	—	—	0	3	—	—	3	11
8 - 9	Lenka	Beranová	kvinta C	G Klatovy	3	3	—	—	—	5	—	11	11
10	Jiří	Vlach	kvarta		3	—	—	3	—	3	—	9	9
11	Rudolf	Kopřiva	1.C	G Frýdek-Místek	—	—	—	—	—	—	—	0	7
12	Martin	Šturma	1.A	G Praha 6	—	—	—	—	—	—	—	0	6
13 - 14	Vít	Šípál	V4.B	G Ústí n. Labem	3	—	2	—	—	—	—	5	5
13 - 14	Vladimír	Fuka	kvinta A		3	2	—	—	—	—	—	5	5
15 - 17	Jindřich	Štástka	1.E	G Sokolov	—	—	—	—	—	—	—	0	4
15 - 17	Jan	Kačmařík	1.A	G Frýdek-Místek	—	—	—	—	—	—	—	0	4
15 - 17	Alena	Julínková	1.C	G Frýdek-Místek	—	—	—	—	—	—	—	0	4
18 - 19	Karol	Martinka	1.G	G Trenčín	—	—	—	—	—	—	—	0	3
18 - 19	Libor	Kocián	1.F		—	—	—	—	3	—	—	3	3
20	Lenka	Burešová	1.C	G Praha 5	—	—	—	—	—	—	—	0	2
21 - 22	Martin	Žák	tercie M	G Praha 5	—	—	—	—	—	—	—	0	1
21 - 22	Michal	Fárka	1.C	G Praha 5	—	—	—	—	—	—	—	0	1
23	Miroslav	Krůs	1.A	G Klatovy	—	—	—	—	—	—	—	0	0