

## Zadání IV. série



**Termín odeslání: 1. března 1999**

### Milí přátelé!

Se zadáním třetí série si vás dovoluujeme pozvat na tradiční akci Fykosu — Den s experimentální fyzikou. Uvedená akce se bude konat dne 17. března 1999 v budově MFF UK v Tróji. Na tuto akci se můžete přihlásit s (včas odeslaným!) řešením 4. série, tedy do 1. března. Se zadáním další série dostanou ti, co se přihlásí, podrobnější program s popisem cesty do Tróje a omluvenku do školy. Již nyní vám můžeme slíbit návštěvu jaderného reaktoru Vrabec, urychlovače částic a jiné zajímavé exkurze.

Na zadní straně série si můžete prohlédnout pozvánku na Jeden den s fyzikou, což je akce pořádaná fakultou pro všechny středoškoláky (narozdíl ode Dne s experimentální fyzikou, který organizujeme jen pro řešitele Fykosu). Na této akci si budete moci prohlédnout fyzikální pracoviště fakulty v areálu Karlov.

Pro naše řešitele, kteří mají přístup k e-mailu, zavedl Fykos novou službu. Pokud nám svůj e-mail sdělí (třeba přímo mailem na [fykos@mff.cuni.cz](mailto:fykos@mff.cuni.cz)), budeme jim vždy poté, co nám dojde jejich řešení, posílat krátký mail, ve kterém potvrdíme, že řešení skutečně došlo. Předejde se tak nepříjemným překvapením, neboť dosud se stává, že pošta nějaké obálky ztratí a řešitelé se to dozví až tehdy, kdy se nenajdou ve výsledkové listině.

**Jiří Franta**

### Úloha IV. 1 ... hokejista

Hokejista jede po ledě jen po jedné brusli. Led, který má hustotu  $0,9 \text{ gcm}^{-3}$  pod bruslí taje do hloubky  $h = 0,03 \text{ mm}$ . Nůž brusle je široký  $d = 2 \text{ mm}$ . Skupenské teplo tání ledu je  $\lambda = 3,3 \cdot 10^5 \text{ Jkg}^{-1}$ . Spočtěte velikost třecí síly mezi bruslí a ledem. Tepelnou vodivost ledu zanedbejte.

### Úloha IV. 2 ... družice

Špionážní družice létá okolo nepřátelské planety po kruhové dráze v rovníkové rovině. Doba jednoho oběhu je  $T$ , planeta má hustotu  $\rho$ . Na jak velké části povrchu planety může družice provádět špionáž?

### Úloha IV. 3 ... tyč ve vodě

Tyč o hustotě  $\rho_1$  a délce  $l$  je za jeden konec pohyblivě připevněna k vodorovné hrazdě (tak, že se okolo ní může tyč volně otáčet), druhý konec volně visí. Pokud budeme pomalu spouštět hrazdu dolů, bude se tyč přibližovat k hladině vody ( $\rho > \rho_1$ ) a začne se do ní ponořovat. Zjistěte závislost úhlu, který svírá tyč se svislým směrem, na výšce hrazdy nad hladinou.

### Úloha IV. 4 ... zima a léto

Spočtěte, o kolik procent se bude lišit teplota na Zemi v periheliu, kdy je Země od Slunce vzdálena  $r$ , od teploty v aféliu, kdy je vzdálenost Země–Slunce  $r(1 + \varepsilon)$  nepatrně větší. Předpokládejte, že Země je dokonale černé těleso a v každém okamžiku je v rovnováze s okolím. Celkový vyzářený výkon je úměrný  $\sigma T^4$ .

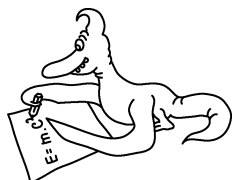
**Úloha IV . P ... v balóně**

Vzduch v horkovzdušném balónu je zahříván konstantním příkonem, aby se vyrovnaly tepelné ztráty a balón letěl stále ve stejné výšce. Průměrná teplota vzduchu v balónu je  $t = 57^\circ\text{C}$ , teplota okolního vzduchu je  $t_0 = 17^\circ\text{C}$ . Tlak vzduchu v balónu je roven okolnímu tlaku. Pokud zvýšíme příkon hořáku tak, aby teplota v balónu vzrostla o  $\Delta t = 0,1^\circ\text{C}$ , o kolik se změní výška letu balónu?

**Úloha IV . Exp ... pružnost a pevnost**

Sežěňte si tenké gumičky a

- změřte závislost protažení gumičky na působící síle a sestrojte graf naměřené závislosti,
- změřte také sílu, při které gumička praskne,
- zatižte gumičku co nejvíce (ale tak, aby se nepřetrhla) a po sundání zátěže proveďte znovu měření a).

**Řešení II. série****Úloha II. 1 ... papiňák (4 body, řešilo 51 studentů)**

Máme hrnec o objemu  $V = 221$ , v němž je dokonale suchý vzduch. Nalijeme do něj kapalnou vodu o hmotnosti  $m = 18$  g. Hrnec poté hermeticky uzavřeme a ohřejeme na teplotu  $100^\circ\text{C}$ . Kolik vody zůstane v kapalném stavu? Vodní páru považujte za ideální plyn.

Po zahřátí mohou nastat dvě možnosti. Buď se odpaří všechna voda (pak není co řešit), anebo se odpaří pouze část vody a v papiňáku budou syté vodní páry. Předpokládejme, že nastane druhý případ.

Tlak sytých vodních par při  $100^\circ\text{C}$  je roven atmosférickému tlaku (rozmyslete si proč!). Známe tedy tlak a objem vodní páry. Ze stavové rovnice dostaneme pro hmotnost páry:

$$m_{odp} = \frac{p_0 V M}{R_m T} ,$$

kde  $p_0$  je atmosférický tlak,  $V$  objem nádoby,  $M$  molární hmotnost vody,  $R_m$  univerzální plynová konstanta a  $T$  termodynamická teplota. Dosazením konkrétních hodnot dostaneme:

$$m_{odp} = 13 \text{ g} .$$

Vidíme, že se skutečně neodpařila všechna voda. Odečtením od celkové hmotnosti získáme hmotnost vody, která zůstala v kapalném stavu

$$m_{kap} = 5 \text{ g} .$$

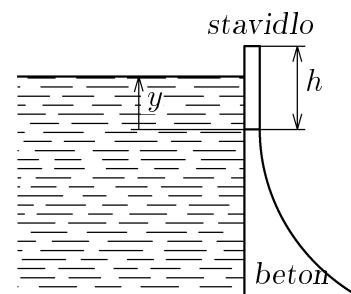
Poznámka: Při řešení jsme směle zanedbali objem kapalné vody proti objemu papiňáku.

**Václav Porod**

**Úloha II. 2 ... přehrada (4 body, řešilo 59 studentů)**

Na řece je postavena přehrada. Plocha umělého jezera je  $100\,000 \text{ m}^2$ , voda z přehrady je vypouštěna stavidlem, které si můžeme představit jako ocelovou desku širokou  $l = 20$  m a vysokou  $h = 10$  m, která, když přehrada nevypouští žádnou vodu, sedí na betonové konstrukci (obr. 1). Když chceme vodu vypouštět, stavidlo zvedneme a voda poteče mezi dolní stranou stavidla a betonovou konstrukcí přehrady. Běžný průtok přehradou je  $20 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ , průtok větší než  $100 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$  je považován za povodeň.

Předpokládejme tuto situaci: Kvůli plnému energetickému využití je přehrada zcela naplněna vodou ( $y = 10$  m), přitéká i odteká  $20 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$  vody. Náhle (v čase  $t_0$ ) se obsluha přehrady dozví neradostnou zprávou, že se blíží



Obr. 1

povodňová vlna — za tři hodiny se přítok najednou zvýší na  $200 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$  a tento stav potrvá další tři hodiny. Poté se přítok opět sníží na  $20 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ . Obsluha má za úkol zabránit povodni pod přehradou. Nalezněte funkci  $f(t)$ , která popisuje závislost velikosti zvednutí stavidla na čase v intervalu (0 h; 6 h) tak, aby k povodni pod přehradou nedošlo. Pokud povodni zabránit nelze, stanovte maximální výšku vody  $y_{\max}$  v čase  $t_0$ , pro kterou je ještě možno zabránit povodni a určete funkci  $f(t)$ .

Při využití maximální přípustné výtokové rychlosti  $100 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$

1. klesne před vlnou hladina o  $(100 - 20) \text{ m}^3\text{s}^{-1} \cdot 3 \cdot 3600 \text{ s} / 100000 \text{ m}^2 = 8,64 \text{ m}$
2. po vlně stoupne hladina o  $(200 - 100) \text{ m}^3\text{s}^{-1} \cdot 3 \cdot 3600 \text{ s} / 100000 \text{ m}^2 = 10,8 \text{ m}$

To značí, že pro  $y_{\max} = 10 \text{ m}$  přehrada přeteče, jelikož výsledná výška bude  $12,16 \text{ m} > h$  a povodni tedy nezabráníme. Funkci  $f(t)$  budeme proto hledat pro počáteční výšku o  $2,16 \text{ m}$  menší, tedy  $y_{\max} = 7,84 \text{ m}$ . Z toho ale plyne, že výška před vlnou bude  $7,84 \text{ m} - 8,64 \text{ m} = -0,8 \text{ m}$  pod otvorem. Na tento problematický výsledek můžeme pohlížet více způsoby:

1. Pokud má být v čase  $t = 3 \text{ h}$  hladina  $0,8 \text{ m}$  pod výtokovým otvorem, je toho možné dosáhnout jedině tak, že v čase  $t = 0 \text{ h}$  bude hladina vody pod výtokovým otvorem ( $y_m < 0$ ).

Nevíme však, zda takového stavu lze v námi uvažované přehradě vůbec dosáhnout. Pokud ano (například vyschnutím, nebo vypouštěním vody utajeným nízko položeným otvorem), tak můžeme provést požadované výpočty. Jednoduchými kupeckými počty získáme  $y_m = 12,4 \text{ m}$ . Funkce  $f(t)$  bude do doby, než hladina dosáhne výtokového otvoru (v čase  $t_0 = 3,22 \text{ h}$ ) nedefinována (pro  $t < t_0$ ). Pro  $t > t_0$  získáme funkci  $f(t)$  tak, že budeme uvažovat, že každou sekundu nám v přehradě přibude  $Q = 100 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$  ( $Q_v = 100 \text{ m}^3$  budeme stavidlem upouštět). Pro výtokovou rychlost v hloubce  $y$  budeme pro zjednodušení používat vztah  $v = \sqrt{2yg}$ , i když vzhledem k nezanedbatelné šířce štěrbiny vneseme do výsledných vztahů nepřesnosti. Bude tedy platit:

$$Q_v = f(t)l\sqrt{2yg} = f(t)l\sqrt{2g(t-t_0)Q/S} \Rightarrow f(t) = \frac{Q_v}{l\sqrt{2g(t-t_0)Q/S}},$$

2. Pokud nepřipustíme polohu hladiny pod výtokovým otvorem, můžeme se alespoň pokusit minimalizovat maximální průtok přehradou. Po uplynutí tří hodin musí být přehrada prázdná,  $y_{\max} = 8,64 \text{ m}$ . Obdobným výpočtem jako výše pak získáme funkci  $f(t)$ :

· pro  $t < 3 \text{ h}$  je

$$f(t) = \frac{Q_v}{l\sqrt{2g(y_{\max} + \frac{Q_1 t}{S})}},$$

kde  $Q_v = 100 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$  a  $Q_1 = -80 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ ,

· pro  $t > 3 \text{ h}$  je

$$f(t) = \frac{Q_v}{l\sqrt{2g\frac{Q_2(t-3\text{h})}{S}}},$$

kde  $Q_v = 107 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ ,  $Q_2 = 93 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ .

Vzhledem k tomu, že některé hodnoty v zadání byly uvedeny s platností na jednu platnou cifru, můžeme i takovýto výsledek (maximální průtok  $Q_v = 107 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ ) považovat za zabránění povodni.

*Miroslav Kládva & Ladislav Michnovič*

### Úloha II. 3 ... vodní lyže (3 body, řešilo 69 studentů)

Vaším úkolem je přijít na to, jak fungují vodní lyže. Proč lyžař neklesne ke dnu? Proč je jeho pozice poměrně stabilní?

Uvažujme nejprve jaké síly na lyžaře působí. Určitě je tažen lanem za lodí a působí na něj tíha. Jelikož se pohybuje ve vodě, bude na něj určitě působit vztlaková síla. Dále bychom asi měli uvažovat také odpor vzduchu a vody.

Vztlakovou sílu můžeme přibližně odhadnout z počátečních podmínek. (Při bedlivém sledování "Neváhej a toč", či "Pobřežní hlídky" jsem zjistil, že lyžaři v záchranných vestách se potopí přibližně do 2/3 hrudníku. Jelikož jedoucí lyžař vyčuhuje z vody celý až na zbytek lyží, troufám si tvrdit, že vztlaková síla jeho udržení na hladině moc neovlivní.

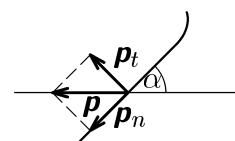
Takže nám zůstaly tyto síly: tíhová, tažná, odpor vzduchu a vody. Odporová síla vzduchu pravděpodobně bude působit pouze horizontálně, kde může lyžaře brzdit a vychylovat ze směru (to vychýlení asi nebude velké, ledaže by foukal větříček, což zanedbáme), její velikost odvodíme z Newtonova vzorce

$$F = \frac{1}{2} C S \rho v^2, \quad (1)$$

kde  $S$  je kolmý průmět plochy lyžaře do směru rychlosti,  $\rho$  je hustota vzduchu,  $v$  jeho rychlost vůči lyžaři a  $C$  součinitel odporu.

Tahovou sílu lodi uvažujeme rovnoběžnou s hladinou a tíhová síla je přirozeně vertikální.

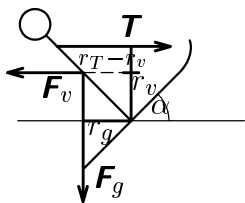
Zbývá nám tedy určit odporovou sílu vody. Síla vzniká jako reakce lyží a vody. Zřejmě je způsobena molekulami vody, které při nárazu do lyží mění svoji hybnost. Zvolme si (trochu nerealisticky), že hybnost všech molekul je stejná. Dle obr. 2 můžeme hybnost rozložit na 2 složky. Normálová složka zřejmě nebude pohybem lyže ovlivněna, ale tečná ano (a naopak). Odporová síla vody má tedy směr kolmice k lyžím (z výše uvedených úvah pro ni dostaneme vzorec podobný Newtonovu).



Obr. 2

Lyžař se udržuje na hladině, ale zároveň se po ní může pohybovat volně, takže jeho zrychlení v horizontálním směru může být libovolné. Podmínkou pro udržení na hladině je nulové zrychlení ve vertikálním směru. Jelikož v tomto směru působí pouze tíhová síla a vertikální průmět odporové síly vody, dostaneme rovnost

$$\frac{1}{2} C' S \rho v^2 \cos \alpha = mg. \quad (2)$$



Obr. 3

Tím jsme určili podmínku pro potopení lyžaře, zbývá nám ošetřit, zda se do vody jednoduše nepřevrátí, čili potřebujeme, aby jeho moment sil byl nulový. Nejprve určíme osu rotace. Většina ji zvolila do středu lyže, kde je upnuto vázání lyžaře. Nyní určíme působíště jednotlivých sil. U tíhové a tahové síly to není žádný problém. Horší je to s oběma odporovými silami. Pokud však aproximujeme člověka do obdélníkového průřezu a počítáme s rovnoměrným rozložením na tuto plochu, aproximujeme působíště výslednice odporové síly vzduchu také někam k těžišti. Obdobně aproximujeme odporovou sílu vody někam do osy rotace. Tato síla tedy působí v ose rotace a nemá vliv na výsledný moment sil. Z obr. 3

odvodíme

$$mgr_g + \frac{1}{2} C \rho_v S_c v_0^2 r_v = T r_T. \quad (3)$$

Dostali jsme tedy dvě podmínky rovnováhy — (2) a (3).

Nyní se podívejme, jak je na tom lyžař se stabilitou. Ve vertikálním směru zřejmě závisí na úhlu  $\alpha$ , rychlosti vůči vodě a průřezu ponořené části lyží a úhel  $\alpha$  je určitě závislý na momentu sil. Pokud se lyžař ponoří více pod hladinu, zvětší se odporová síla vody a lyžař se tedy vydá opět k hladině. Pokud lyžař zrychlí, stoupne výše nad hladinu, a pokud zpomalí, klesne hlouběji pod hladinu. Tady jeho poloha ve smyslu vertikály stabilní není. Zrychlovat či zpomalovat může lyžař pouze díky člunu, nebo díky proudění vody. Pokud se změní tahová síla člunu, dojde ke změně momentu sil i horizontálního zrychlení. Tím se ovlivní rychlost vůči vodě i vzduchu i úhel  $\alpha$ . Odporová síla vzduchu a horizontální složka odporové síly vody působí vždy proti zrychlování pohybu, ale souhlasně s jeho zpomalováním. Tady tedy stabilitu nenalezneme. Čili rychlost obecně není stabilní, pokud se změní síly. Stabilitu rychlosti musí ovlivňovat člun. Pokud se ale lyžař nakloní ve směru úhlu  $\alpha$ , evidentně neexistuje síla, která by ho vracela zpět do původní pozice. Lyžař by se tedy měl při sebemenší výchylce převrátit. Pomohlo by, kdybychom uvažovali, že odporová síla vody nepůsobí v ose rotace, ale v závislosti na  $\alpha$ . Podle mého názoru ale její rameno

bude velmi malé, takže její moment bude malý, a proto nestačí kompenzovat větší výchylky jako jsou vlny. Zde podle mě hraje roli sám lyžař, který musí aktivně měnit ramena sil svým nakláněním a předřepáváním. Takže o rotační stabilitu se musí postarat hlavně sám lyžař. Problém stability orientace a směru v horizontální poloze si už můžete promyslet sami.

*Libor Dener*

#### Úloha II.4 ... čočka ve vodě (3 body, řešilo 46 studentů)

Tenká, ploskodutá čočka je ponořena do vody ve vodorovné poloze dutou stranou dolů, jak ukazuje obrázek. Celková optická mohutnost takto vytvořené optické soustavy je  $D = -2,6$  dioptrií. Určete poloměr křivosti skleněné čočky. ( $n_1 = 1,5$ ;  $n_2 = 1,33$ ;  $n_3 = 1$ ).

Úlohu lze řešit mnoha způsoby — například můžeme využít toho, že celková optická mohutnost tenkých čoček těsně k sobě přiložených je rovna součtu optických mohutností jednotlivých čoček nebo pomocí paraxiálních paprsků. Protože se první způsob při znalosti vztahu pro výpočet ohniskové vzdálenosti tenké čočky (uveden ve většině tabulek či učebnic fyziky) redukuje na vyjádření neznámé ze jmenovatele, tak bych se věnoval způsobu druhému. Jako první způsob předpokládá, že se čočka nachází v nevelké hloubce a vzduchová bublina není zakřivena. Paprsek rovnoběžný s optickou osou dopadá „zhora“ na čočku. Na rozhraní voda-sklo se neláme (dopadá kolmo), na rozhraní sklo-vzduch dopadá pod úhlem  $\alpha$  a láme se pod úhlem  $\beta$ , na rozhraní vzduch-voda dopadá pod úhlem  $\beta - \alpha$  a láme se pod úhlem  $\gamma$ . Vzhledem ke zjednodušení uvedenému výše a v zadání (paraxiální paprsky, rozhraní voda-sklo a vzduch-voda jsou rovnoběžná, tenká čočka) budou úhly  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  malé a můžeme využít rovnosti  $\sin \phi \doteq \text{tg } \phi \doteq \phi$  (pro úhel  $\phi$  zadaný radiánech). Z obrázku je patrné, že  $\sin \gamma = d/f \doteq \gamma$  a ze zákona lomu plyne  $n_2 \sin \gamma = n_3 \sin(\beta - \alpha)$  a tedy

$$\beta - \alpha = \frac{\gamma n_2}{n_3} = \frac{dn_2}{fn_3}. \quad (4)$$

Dále platí (zákon lomu pro rozhraní voda-sklo):  $n_1 \sin \alpha = n_3 \sin \beta$  a tedy  $\alpha n_1 = \beta n_3 \Rightarrow \beta = \alpha n_1/n_3$  a po dosazení z trigonometrického vztahu  $\sin \alpha = d/r \doteq \alpha$  dostáváme  $\beta = dn_1/rn_3$ , což můžeme dosadit do (4):

$$\frac{dn_1}{rn_3} - \frac{d}{r} = \frac{dn_2}{fn_3}$$

a s využitím toho, že  $f = 1/D$  dostaneme výsledný vztah

$$r = \frac{n_1 - n_3}{Dn_2}.$$

Číselně vychází pro zadané hodnoty  $r = -14,5$  cm. Zápornost výsledku je způsobena znaménkovou konvencí.

*Jan Prokleška*

#### Úloha II.P ... ve výtahu (6 bodů, řešilo 41 studentů)

U každého výtahu v mrakodrapu je jisté riziko, že se zpřetrhají všechna lana, na kterých visí. Abychom předešli případnému úrazu, můžeme výtah vylepšit: Spodní část výtahové šachty utěsníme tak, abychom zamezili úniku vzduchu. Také okolo kabiny výtahu dáme těsnění. Výtah, který se utrhne v horním patře mrakodrapu se zabrzdí o vzduchový polštář, který si pod sebou stlačí. Předpokládejte, že kabina vážící 1000 kg se utrhla 87 m vysoko a vzduchotěsná část výtahové šachty začíná 15 m nad zemí. Jak vysoko nad zemí se kabina nakonec zastaví? Jak velké síly působí po dobu pádu na cestující? V případě výpočtu síly se spokojíme i s kvalifikovaným odhadem, přesný výpočet bude po zásluze odměněn.

Pohyb kabiny výtahu je jednorozměrným problémem. Považujme tedy směr dolů za kladný a směr nahoru za záporný. Výškou kabiny výtahu rozumějme vzdálenost dna kabiny od dna výtahové šachty. Označme  $m$  hmotnost kabiny výtahu,  $S$  plochu dna kabiny,  $h$  výšku vzduchotěsné části výtahové šachty a  $H$  výšku, ve které se kabina utrhne. Poměr  $m/S$  je výhodné označit jako  $m^*$ . Reálné hodnoty  $m^*$  leží zhruba mezi 500 až 1000  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}$ . V dalších výpočtech uvažujme hodnotu  $m^* = 750 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-2}$ .

Kvalitativní popis pohybu kabiny je zhruba následující: Kabina se začne pohybovat šachtou směrem dolů vlivem tíhové síly. Tento pohyb je zpomalován působením okolního vzduchu. V okamžiku, kdy dno kabiny dosáhne vzduchotěsné části šachty, začne kabina stlačovat vzduch pod sebou. Rostoucí tlak pod kabinou způsobí její zabrzdění a její následné urychlení směrem nahoru. Děj ve vzduchotěsné části lze považovat za adiabatický, neboť bude poměrně rychlý. To znamená, že velikost rychlosti kabiny po opuštění vzduchotěsné části šachty bude stejná jako při vstupu do ní. Pohyb kabiny směrem nahoru je brzděn jednak tíhovou silou a jednak působením okolního vzduchu. Kabina se tedy zastaví ve výšce, která je menší než výška, ve které pohyb začal. Pohyb kabiny se poté opakuje. Díky působení okolního vzduchu a tepelným ztrátám ve vzduchotěsné části šachty se kabina ustálí někde ve vzduchotěsné části. Zbývá tedy určit tuto výšku.

Tlak vzduchu nad kabinou lze prakticky vždy považovat za rovný atmosférickému. Tlak vzduchu pod kabinou při pohybu v neutěsněné části výtahové šachty bude mít hodnoty zhruba někde mezi  $p_a$  a  $p_a + m^*g$ . V případě, že kabina vstupuje do vzduchotěsné části naposledy, bude tlak vzduchu pod kabinou téměř roven atmosférickému. Teplota  $T$  vzduchu ve vzduchotěsné části je stejná před vstupem i výstupem kabiny a je rovna teplotě okolí. Pro výšku  $h_k$ , ve které se výtah ustálí (dojde i k vyrovnání teploty plynu s teplotou okolí), tedy platí podle stavové rovnice:

$$\frac{(p_a + m^*g)h_k S}{T} = \frac{p_a h S}{T}$$

$$h_k = \frac{h}{1 + m^*g/p_a} = 14 \text{ m}$$

Jelikož je  $m^*g$  podstatně menší než  $p_a$ , vychází  $h_k$  téměř rovné  $h$ . Protože nic není dokonale těsné, bude kabina velmi pomalu klesat ke dnu výtahové šachty, kde již skončí natrvalo.

Síly působící na cestující lze popsat pomocí veličiny  $a$ , která udává zrychlení tělesa v soustavě spojené s kabinou, které mu uděluje výslednice tíhové a setrvačné síly. Aby byl cestující v kabině v klidu, musí na něho působit další síly o výslednici  $-m_c a$ , kde  $m_c$  je hmotnost cestujícího. Je-li výslednice silového působení okolního vzduchu na kabinu rovna  $F$ , potom pro  $a$  platí:

$$a = g - \left( g + \frac{F}{m} \right) = -\frac{F}{m}$$

Určit sílu  $F$  je velmi složité. Nejdůležitější informaci o silách působících na cestující udává maximální velikost  $a$ .

Pohybuje-li se kabina směrem dolů v neutěsněné části, potom je hodnota  $a$  někde mezi 0 a  $g$  (přesná hodnota závisí na brzdě síle  $F$ ). Pohybuje-li se kabina směrem nahoru, potom je  $a < 0$ , přičemž velikost  $a$  bude nejspíše menší než  $g$ . Maximálních hodnot  $a$  se bude dosahovat při pohybu ve vzduchotěsné části. Je-li  $y$  výška kabiny ve vzduchotěsné části šachty, potom pro tlak  $p$  pod kabinou platí:

$$p_a (Sh)^\kappa = p (Sy)^\kappa \quad \Rightarrow \quad p = p_a \left( \frac{h}{y} \right)^\kappa$$

To tedy znamená, že:

$$a = \frac{(p - p_a)S}{m} = \frac{p_a}{m^*} \left[ \left( \frac{h}{y} \right)^\kappa - 1 \right]$$

Je-li  $y_m$  minimální výška  $y$ , potom pro maximální hodnotu  $a_m$  platí:

$$a_m = \frac{p_a}{m^*} \left[ \left( \frac{h}{y_m} \right)^\kappa - 1 \right]$$

Je-li  $v_0$  rychlost, kterou kabina vstupuje do vzduchotěsné části šachty, pak pro minimální  $y_m$  platí \*) :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + (p_a + m^*g)(h - y_m)S = \frac{p_aSh}{\kappa - 1} \left[ \left( \frac{h}{y_m} \right)^{\kappa-1} - 1 \right]$$

Levá strana této rovnosti udává práci, která se vykoná na plynu pod kabinou při jeho adiabatickém stlačení z objemu  $Sh$  na objem  $Sy_m$ . Jelikož se jedná o adiabatický děj, je tato práce rovna přírůstku vnitřní energie plynu pod kabinou. Tento přírůstek je vyjádřen pomocí pravé strany rovnice. Tvar pravé strany rovnice se dostane úpravou vztahu  $C_V n(T_m - T)$  pro přírůstek vnitřní energie za použití stavové rovnice  $pV = nRT$  a vztahů  $\kappa = C_p/C_V$ ,  $C_p = C_V + R$ . Vyjádříme-li  $y_m$  pomocí  $a_m$ , potom získáme tento vztah:

$$v_0^2 = \frac{2p_a h}{m^*} \left\{ \frac{(1 + m^*a_m/p_a)^{(\kappa-1)/\kappa} - 1}{\kappa - 1} - \left(1 + \frac{m^*g}{p_a}\right) \left[1 - \left(1 + \frac{m^*a_m}{p_a}\right)\right] \right\}$$

Známe-li  $v_0$ , pak lze určit  $a_m$ . To je však možné pouze numericky. Využijeme-li však toho, že  $v_0$  s rostoucím  $a_m$  roste, potom můžeme postupovat i jinak. Bude-li  $a_m = 10$  g, potom by nemělo dojít k těžkým zraněním cestujících. Pro  $a_m = 5$  g by vše mohlo proběhnout bez vážnějších úrazů. Při odhadu těchto mezí je důležité uvědomit si, že k průletu vzduchotěsnou částí může dojít několikrát a směr  $a$  se během pohybu neustále mění. Pro uvedené meze vycházejí následující hodnoty:

$$a_m = 5 \text{ g} : v_0 = 9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$a_m = 10 \text{ g} : v_0 = 18 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Zbývá určit hodnotu rychlosti  $v_0$ . Maximální možná hodnota  $v_0$  je ta, která odpovídá volnému pádu:

$$v_0 = \sqrt{2g(H - h)} = 38 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Minimální odporová síla vzduchu je určena Newtonovým vzorcem. Té přísluší mezní rychlost  $v_m$ :

$$v_m = \sqrt{\frac{2m^*g}{C\rho}} = 110 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

kde  $\rho = 1,28 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  je hustota vzduchu a hodnota  $C$  je zhruba 1. Porovnáme-li tuto hodnotu s maximální možnou hodnotou  $v_0$ , potom dojdeme k závěru, že v případě velké mezery mezi kabinou a výtahovou šachtou a malé těsnosti stěn výtahové šachty může dojít k těžkým zraněním cestujících popřípadě k jejich smrti.

Je-li celková plocha mezer  $S'$ , kterými může unikat vzduch z prostoru pod kabinou, podstatně menší než  $S$ , potom lze mezní rychlost  $v_m$  odhadnout následovně: Tlak pod kabinou je při mezní rychlosti roven  $p_a + m^*g$ . Je-li rychlost unikajícího vzduchu rovna  $v$ , potom dle Bernoulliho rovnice platí:

$$p_a + m^*g = p_a + \frac{1}{2}\rho v^2$$

Mezi  $v$  a  $v_m$  platí, že  $S'v = Sv_m$ . Pro  $v_m$  tedy dostáváme toto vyjádření:

$$v_m = \frac{S'}{S} \sqrt{\frac{2m^*g}{\rho}}$$

Pro  $S'/S < 0,1$  dostaneme, že  $v_m < 11 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . V tomto případě by se vše mohlo obejít bez vážných úrazů. Nicméně i přesto by bylo lepší užít pokud možno jiný záchranný systém.

**Karel Kolář & Ondřej Pejchal**

\*) Používáme vztahy platné pro rovnovážné děje, i když tento děj rovnovážný není.

**Úloha II. Exp ... koulení** (8 bodů, řešilo 39 studentů)

Sežěňte si několik (cca 6) předmětů kulového tvaru. Může jít například o míček na pingpong, tenis, fotbalový míč, ocelovou kuličku, hliněnou kuličku... Změřte jejich momenty setrvačnosti. Navrhněte a proveďte další měření, s jejichž pomocí budete moci určit, zda se jedná o dutou nebo plnou kouli.

Měřit moment setrvačnosti bylo možno několika způsoby. Například, jak už napovídá název, koulením z nakloněné roviny a změřením rychlosti rovnoměrného pohybu po projetí nakloněnou částí, či přímo měřením doby projetí po nakloněné části. Též se objevila metoda měření kmitů kyvadla vzniklého zavěšením koule těsně u povrchu. Nutno poznamenat, že tato metoda byla u větších koulí nejpřesnější. Našli se však i tací, kteří pouze změřili poloměr a hmotnost a moment setrvačnosti vypočítali podle známého vzorce

$$J = \frac{2}{5}mr^2.$$

Někteří však zapomněli, že tento vzorec platí pouze pro koule homogenní, navíc touto metodou nelze určit, zda je koule dutá. Nejlepší metoda, jak zjistit dutost koule byla vyjádřit si její moment setrvačnosti jako

$$J = kmr^2. \quad (5)$$

Potom  $k = \frac{2}{5}$  je pro kouli plnou a  $k = \frac{2}{3}$  je pro ideální kulovou slupku, o něco méně tedy pro reálnou dutou kouli s tenkou stěnou.

*1. měření koulením*

Máme tedy nakloněnou rovinu délky  $s$  a výšky  $h$  a kouli o hmotnosti  $m$  a poloměru  $r$ . Ze zákona zachování energie na konci nakloněné roviny můžeme psát:

$$\begin{aligned} E_p &= E_k + E_{rot} \\ mgh &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \end{aligned}$$

Pokud za  $J$  dosadíme z (5) a za  $v$  ze zrychleného pohybu  $v = 2s/t$ , můžeme pro  $k$  psát

$$k = \frac{ght^2}{2s^2} - 1$$

Nutno poznamenat, že se zde projeví vliv třecích sil. Valivé tření o podložku lze zmenšit vhodnou volbou podložky, nejlépe co nejtvrdší (dřevo, kov), odpor vzduchu se zase méně projeví u menších koulí. Nevýhodou této metody je, že krom tření se zde projevuje též chyba vzniklá měřením krátkých časů.

*2. měření kýváním*

Osou kývání musíme umístit co nejbližší ke středu koule, aby měření bylo co nejpřesnější. Vztah pro periodu kmitů pak můžeme psát jako

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J + md^2}{mgd}}$$

kde  $d$  je vzdálenost mezi osou a středem koule. Lze se snadno přesvědčit, že pro  $md^2 \gg J$  se tento vztah redukuje na známý vztah pro matematické kyvadlo.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}$$

Opět můžeme dosadit za  $J$  z (5) a pro  $k$  psát

$$k = \frac{\frac{T^2}{4\pi^2}gd - d^2}{r^2}$$



Osa kývání musí být co nejlíže kouli, proto je třeba závěs udělat co nejlepší. Zůstává problém určení  $d$ . Zda určit délku závěsu a přičíst poloměr nebo změřit vzdálenost osy a spodního vrcholu koule a poloměr odečíst. Záleží na aparatuře a pomůckách, která metoda je lepší. Výhodou této metody je, že se zde tolik neuplatňuje tření a můžeme měřit delší časy, proto je tato metoda přesnější pro větší koule, kde můžeme dobře uchytit závěs.

Nyní uvedu příklady měření

1. metoda koulení

dráha:  $s = (200,0 \pm 0,1)$  cm

výška:  $h = (36,8 \pm 0,1)$  cm

doba koulení:  $t_i$

2. metoda kývání

délka závěsu: plná —  $d = 78$  mm,

dutá —  $d = 128$  mm

doba 50 kmitů:  $t_i$

veličina	$t$ [s]	
koule	plná	dutá
	1,7	1,9
	1,8	2,0
	1,8	2,0
	1,7	2,0
	1,7	1,9
průměr	1,74	1,96
chyba	0,02	0,02
$k$	0,36	0,73
chyba	0,03	0,04

veličina	$t$ [s]		$2\pi r$ [cm]	
koule	plná	dutá	plná	dutá
	30,0	44,6	20,0	75,7
	29,7	44,7	20,2	75,5
	29,9	44,6	20,0	75,5
	30,0	44,3	20,0	75,8
	29,8	44,7	20,1	75,6
průměr	29,88	44,58	20,06	75,62
chyba	0,06	0,07	0,04	0,06
$k$	0,38	0,658		
chyba	0,03	0,008		

Je vidět, že pro plnou kouli se  $k$  blíží k  $\frac{2}{5}$  a pro kouli dutou k  $\frac{2}{3}$ , přičemž přesnější je měření metodou kývání.

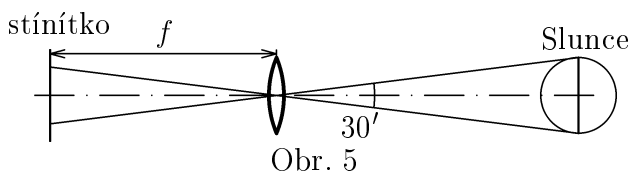
V tabulkách byly použity některé hodnoty, jejichž autorem je Jan Houštek.

Nakonec bych jen dodal pro některé snaživé řešitele, že opravdu není třeba uvádět výsledky měření a výpočtů na 8 platných číslic, když chyba měření je kolem 10%.

**Jiří Libra**

**Úloha S. II ... spektra, spektrografy a koutové odražeče (5 bodů, řešilo 52 studentů)**

- Jak velký obraz Slunce se vytváří na štěrbině Ondřejovského spektrografu?
- Pokuste se přijít na důvod, proč se pro napájení spektrografu používají dvě zrcadla (coelostat), a nikoli jen jedno zrcadlo (heliostat).
- Jak dlouho čekali pozorovatelé na Zemi, než se jim vrátil signál vyslaný k Měsíci, který se na Měsíci odrazil od koutového odražeče?
- Dokažte, že tři na sebe navzájem kolmá zrcadla, použitá v koutovém odražeči, mají tu výhodnou vlastnost, že paprsek od nich odražený se šíří v **přesně** opačném směru, než přišel.
- Při noční jízdě automobilem pozorujeme na krajnici oranžové zářící předměty. Kde se bere energie na jejich „svícení“? Proč řidič nevidí ve zpětném zrcátku stejné svítící předměty?



Obr. 5

- Úhlový rozměr Slunce, jak jej vidíme ze Země, je přibližně 30'.\*) Podívejme se tedy, jak objektiv s ohniskovou vzdáleností  $f = 13,5$  m zobrazí paprsky přicházející z okrajů slunečního kotouče.

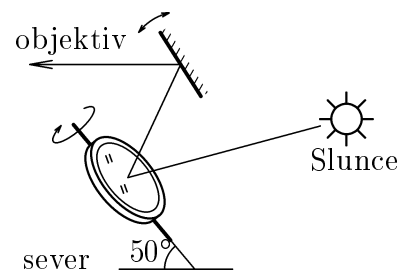
Na obrázku jsme si kvůli přehlednosti dovolili místo zrcadlového objektivu nakreslit čočkový, aby se nám nemíchal předmětový a obrazový poloprostor. Víme, že ostrý obraz vznikne v ohniskové rovině, neb Slunce je v porovnání s ohniskovou vzdáleností velmi daleko. Dále využijeme skutečnosti, že paprsky procházející středem čočky nejsou nijak ovlivněny. Z obrázku je patrné, že na stínítku vznikne obraz slunečního kotouče o průměru  $d = 2 \operatorname{tg} \frac{30'}{2} f = 11,8$  cm. (Pro malé úhly  $\alpha$  platí:  $\alpha$  v radiánech =  $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha$ .)

\*) Toto je číslo dobré k zapamatování. Mimochodem, úhlový průměr Měsíce se mění od 29' do 33' a díky tomu můžeme vidět úplná nebo prstencová sluneční zatmění.

b) Důvod je docela jednoduchý — při pozorování Slunce je třeba, aby se jeho obraz na štěrbině spektrografu neotáčel s časem. S jedním zrcadlem však tuto podmínku nesplníme. (Celý spektrograf je velmi složité a velké zařízení (zabírá celou budovu) a proto potřebuje, aby do něj vstupoval obraz Slunce pořád ze stejného směru.)

Coelostat na obrázku funguje následovně: první zrcadlo se během dne otáčí okolo osy, která je rovnoběžná se zemskou, opačným směrem než rotuje zeměkoule a poloviční úhlovou rychlostí. Vůči vodorovné rovině je tedy osa skloněná o úhel rovnající se zeměpisné šířce. Poloha druhého zrcadla se musí měnit během roku, neboť se mění tzv. deklinace Slunce. Prostě v létě cestuje Slunce po obloze vysoko a v zimě naopak nízko. Abychom světlo dostali do horizontálního dalekohledu musíme druhé zrcadlo vhodně natočit okolo vodorovné osy.

Proč při používání heliostatu dochází ke stáčení obrazu si osvětlíme na dvou příkladech. Představme si nejprve, že je rovnodennost a poledne. Slunce v tu dobu svítí nad jižním obzorem ve výšce  $40^\circ$ . A ještě předpokládejme, že na slunečním kotouči je nakreslena svislá úsečka, která nám bude indikovat otočení kotouče. Jediné zrcadlo heliostatu stačí natočit k jižnímu obzoru, sklonit o  $20^\circ$  vůči vodorovné rovině a poslat světlo do horizontálního dalekohledu jehož objektiv je otočen k severu. Ale o šest hodin později, když Slunce zapadá, bude situace jiná. Úsečka na kotouči **nebude** kolmá k obzoru, zrcadlo musí být postaveno svisle, protože Slunce je na obzoru a my vlastníme horizontální dalekohled. Je zřejmé, že na stínítku nemůžeme získat stejnou svislou úsečku jako v poledne.



Obr. 6

Coelostat nám však pomůže: po odrazu na prvním zrcadle bude úsečka ve stejné rovině jako jsou středy zrcadel a objektivu (proč tomu tak je nám pomůže pochopit představa roviny určené středy zrcadel a středem slunečního kotouče). Tu nepříjemnost, že paprsky po odrazu směřují vysoko do nebes a nikoli do dalekohledu, snadno napravíme druhým zrcadlem.

Doufáme, že jsme vás nezklamali tím, že jsme neuvadli žádné „matematické“ řešení, ale spíše návod, abyste přesvědčili sami sebe, že je to správné řešení. Pro jiné denní a roční doby je situace ještě trochu náročnější na prostorovou představivost, ale myslíme, že to přesto můžeme nechat na vás.

c) Označme vzdálenost mezi pozorovatelem na Zemi a místem, kde je umístěn koutový odražeč jako  $d$ . Pak musel světelný signál procestovat dráhu  $2d$  a při rychlosti jakou cestoval mu to trvalo  $\frac{2d}{c} \doteq 2,6$  s, pokud vezmeme, že vzdálenost povrchů Z–M je 380 000 km (v tabulkách udávaná vzdálenost Z–M je vzdálenost středů). Provedeme-li měření opravdu přesně, lze určit vzdálenost mezi pozorovatelem a místem, kde je koutový odražeč umístěn, s přesností lepší než 1 cm.

d) Mějme paprsek, který se šíří v prostoru směrem, který můžeme charakterizovat jednotkovým vektorem  $(x, y, z)$ . Nechť dopadne na zrcadlo, které je umístěno v rovině  $xy$ , tj. kolmé k ose  $z$ . Co se stane se směrovým vektorem paprsku? Změní se jeho složka ve směru osy  $z$ , směr šíření ve směru  $x$  a  $y$  se nezmění a složky vektoru zůstanou zachovány. Dostaneme paprsek se směrovým vektorem  $(x, y, -z)$ . Ve směrovém vektoru změní znaménko a složka, která je kolmá k rovině zrcadla.

Zavedme si v prostoru kartézský souřadný systém tak, že jednotlivá zrcátka v koutovém odražeči budou splývat s rovinami  $xy$ ,  $yz$  a  $xz$ . Pokud se paprsek odrazí od všech třech zrcátek, změní se postupně všechny tři složky jeho směrového vektoru. Z původního vektoru  $(x, y, z)$  dostáváme vektor  $(-x, -y, -z) = -(x, y, z)$ , což je vektor přesně opačného směru než vektor, který do odražeče přišel.

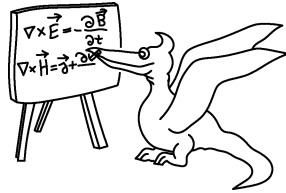
e) To, co vidíme v noci na okraji cest jsou odrazky na patnících kolem silnic. Vlevo jsou bílé a vpravo oranžové, aby řidič hned poznal, jestli má patník objet zprava (příkopem) nebo zleva (po silnici) v případě oranžové odrazky.

Odrážka je další aplikací koutového odražeče. Že je její barva jiná, než barva dopadajícího světla, je způsobeno tím, že před vlastní odraznou plochou je příslušně zbarvený průhledný materiál.

U okrajů vozovky tedy vidíme světlo, které pochází z našich vlastních reflektorů a odráží se v koutovém odražeči (=odrazka). Za automobilem nic vidět není, protože vzadu není dostatečně silný zdroj světla, které by se mohlo odrážet zpět (koncová světla nejsou směrová a mají menší výkon než čelní reflektory).

Některé „svítící“ dopravní značky a reklamy nejsou z koutových odražečů, ale z drobných skleněných kuliček. Posvítíme-li na kuličku, ne všechny paprsky se odrazí přesně zpět. Existují však některé paprsky, které se odrazí zpět, a ty pak vytváří dojem, že značka svítí.

*Miroslav Brož & Jan Hradil*

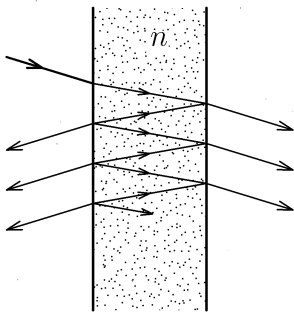


## Seriál na pokračování

Minule jsme si něco pověděli o komplexních číslech, dnes si ukážeme jak, je můžeme použít při výpočtu vlastností Fabry-Perotova rezonátoru. Také se dostaneme k principu laseru, vynálezu, který našel uplatnění v mnoha vědních oborech i v každodenním životě.

### Fabry-Perotův rezonátor

Fabry-Perotův rezonátor se skládá ze dvou rovnoběžných rovinných rozhraní, která jsou charakterizována svými odrazivostmi neboli koeficienty reflektivity  $r_1$  a  $r_2$ , které udávají poměr mezi velikostí odražené a dopadající amplitudy intenzity elektrického pole ve vlně. Každé rozhraní je dále charakterizováno transmisí  $t_1$  a  $t_2$ , tj. poměrem velikostí prošlé a dopadající amplitudy intenzity elektrického pole. Poměr odražené energie k dopadající popisuje reflexní koeficient  $\mathcal{R}$  rovný  $rr^*$ , v případě reálného  $r$  je  $\mathcal{R} = r^2$ . Podobně  $\mathcal{T} = t^2$ . Obě rozhraní jsou od sebe vzdálena  $d$  a mezi nimi je prostředí o indexu lomu  $n$ . Nejjednodušším příkladem takového uspořádání je obyčejné sklíčko. Jako rozhraní slouží rozhraní vzduch-sklo a sklo-vzduch. Dalším příkladem jsou dvě rovnoběžná zrcadla.



Obr. 7

Ještě než se pustíme do řešení samotného F-P rezonátoru, musíme se podívat, co se děje s fází vlny, pokud se volně šíří prostorem. Nechť máme vlnu šířící se v kladném směru osy  $x$  v počátku s fází  $\phi_0$ , můžeme ji napsat jako  $e^{i(\omega t + \phi_0)}$ . V místě  $x$  bude argument v exponenciále větší o  $ikx$ . Z původní vlny dostaneme vlnu posunutou do jiného bodu vynásobením jednoduchým výrazem  $e^{ikx}$  (při násobení exponenciál sčítáme jejich argumenty, tj. to co je nahoře). Fáze vlny se změní o hodnotu  $kx = 2\pi \frac{x}{\lambda}$ , což odpovídá tomu, kolik vlnových délek se vejde mezi počátkem a bodem  $x$ . Hodnotu  $\lambda$  je potřeba brát pro prostředí, ve kterém probíhá šíření. Většinou se udává vlnová délka světla ve vakuu  $\lambda_0$  a pak je potřeba použít  $\lambda = \lambda_0/n$ , kde  $n$  je index lomu daného prostředí. Vlnová délka v prostředí je

vždy menší než ve vakuu.

Obvykle je F-P rezonátor obklopen z obou stran prostředím o stejném indexu lomu. Označme tedy  $r = r_1 = r_2$  a  $t = t_1 = t_2$  a předpokládejme, že rezonátor má uvnitř opticky hustší prostředí než venku.

Nechť na F-P rezonátor dopadá kolmo rovinná elektromagnetická vlna s amplitudou  $E_0$ . Její část, daná součinem  $-r_1 E_0$  se odrazí\*), zbytek vnikne dovnitř. Označme  $\delta = 2\pi nd/\lambda_0$  změnu fáze vlny při jednom průchodu vrstvou. Vlna prošlá až na druhé rozhraní je  $tE_0 e^{i\delta}$ , tam se část odrazí zase zpět a na první rozhraní dorazí vlna  $tE_0 e^{i\delta} r e^{i\delta}$ , jejíž část projde zpět do původního prostředí. Komplexní amplituda této vlny je

$$tE_0 e^{i\delta} r e^{i\delta} t = t^2 r e^{2i\delta} E_0.$$

\*) při odrazu na rozhraní opticky řidšího a opt. hustšího prostředí dochází ke změně fáze o  $\pi$ , vlnu tedy musíme vynásobit ještě  $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + 0i = -1$

Zpět se ještě odrazí další vlny, z nichž každá prošla vždy několikrát tam a zpět celým rezonátorem. Každý další průchod rezonátorem změní fázi vlny o  $re^{i\delta}re^{i\delta} = rre^{2i\delta}$  (dvakrát se odrazí na rozhraní a dvakrát projde vzdálenost  $d$ ). Sečteme-li všechny vlny, které se odrazí od F-P rezonátoru, dostaneme následující součet:

$$\begin{aligned} E^{(r)} &= E_0(-r + t^2re^{2i\delta} + t^2re^{2i\delta}(rre^{2i\delta}) + t^2re^{2i\delta}(rre^{2i\delta})^2 + \dots) = \\ &= E_0(-r + t^2re^{2i\delta}[1 + rre^{2i\delta} + (rre^{2i\delta})^2 + \dots]) . \end{aligned}$$

Všimněme si, že v hranaté závorce je nekonečná geometrická řada  $(1 + q + q^2 + \dots)$  s kvocientem  $q = r^2e^{2i\delta}$ , jejíž součet je  $\frac{1}{1-q}$ . S využitím tohoto vztahu získáme

$$E^{(r)} = E_0 \left( -r + \frac{t^2re^{2i\delta}}{1 - r^2e^{2i\delta}} \right) = E_0 \frac{-r + (\mathcal{R} + \mathcal{T})re^{2i\delta}}{1 - \mathcal{R}e^{2i\delta}} = -\frac{1 - e^{2i\delta}}{1 - \mathcal{R}e^{2i\delta}} \sqrt{\mathcal{R}}E_0 ,$$

kde jsme využili toho, že energie dopadající na rozhraní se rozdělí na odraženou a prošlou část a tudíž  $\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$  (zákon zachování energie). Zatím ale máme výraz pro odraženou amplitudu intenzity elektrického pole. Tu ale nemůžeme přímo měřit. Obvykle pozorujeme intenzitu světla, která je úměrná součinu  $EE^*$ , kde  $*$  značí komplexní sdružení, tj. komplexní číslo se stejnou reálnou částí, ale opačnou imaginární částí. Intenzita dopadajícího světla  $I_0$  je  $E_0E_0^*$ . Po provedení sdružení a vynásobení dostaneme, že intenzita odraženého světla je rovna

$$I^{(r)} = \frac{2 - 2\cos(2\delta)\mathcal{R}}{1 + \mathcal{R}^2 - 2\mathcal{R}\cos(2\delta)} I_0 = \frac{4\mathcal{R}\sin^2\delta}{(1 - \mathcal{R})^2 + 4\mathcal{R}\sin^2\delta} I_0 = \frac{\mathcal{F}\sin^2\delta}{1 + \mathcal{F}\sin^2\delta} I_0 ,$$

kde jsme zavedli jemnost rezonátoru  $\mathcal{F} = \frac{4\mathcal{R}}{(1-\mathcal{R})^2}$ .

Podobné úvahy jako v případě odrazu bychom mohli provést i v případě prošlého světla, dokonce bychom sčítali i stejnou geometrickou řadu, jen by okolo byly nějaké jiné koeficienty. Na závěr obdobných operací dostaneme intenzitu prošlého světla

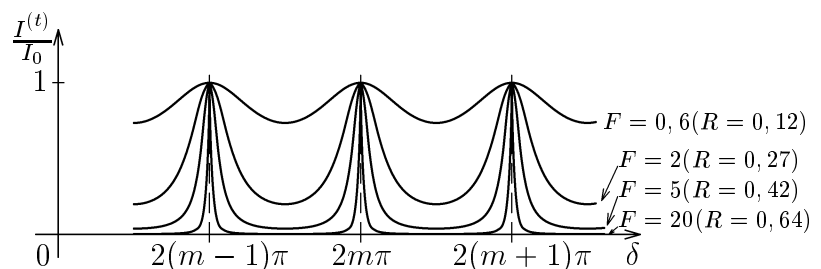
$$I^{(t)} = \frac{\mathcal{T}^2}{1 + \mathcal{R}^2 - 2\mathcal{R}\cos(2\delta)} I_0 = \frac{\mathcal{R}^2}{(1 - \mathcal{R})^2 + 4\mathcal{R}\sin^2\delta} I_0 = \frac{1}{1 + \mathcal{F}\sin^2\delta} I_0 ,$$

Jak vypadá propustnost Fabry-Perotova etalonu je naznačeno na obrázku 8. Je vidět, že propustnost je periodickou funkcí proměnné  $\delta = 2\pi nd/\lambda_0$ . Poloha maxim je tedy závislá na vlnové délce světla, indexu lomu a tloušťce rezonátoru. Maximum propustnosti nastává, pokud je argument sinu roven celistvému násobku  $\pi$ , pak je sinus roven nule a jmenovatel zlomku je nejmenší. Pro nás to znamená, že  $\delta = k\pi$ , kde  $k$  je celé číslo, z čehož vyplývá

$$d = k \frac{\lambda}{2n} , \quad (6)$$

jinými slovy, že délka rezonátoru  $d$  musí být celistvým násobkem poloviny vlnové délky v materiálu, ze kterého je vyroben vnitřek F-P rezonátoru.

Stejný vztah pro polohu maxim propustnosti se odvozuje jen z představy úplné konstruktivní interference pro prošlý paprsek. My však víme, jaká bude propustnost i odrazivost F-P rezonátoru i tehdy, když interference není přesně konstruktivní nebo destruktivní. Na obrázku 8 můžeme



Obr. 8

vidět, že ostrost jednotlivých maxim závisí na odrazivosti jednoho rozhraní. Pokud bude odrazivost dostatečně velká, může se rezonátor chovat jako dokonalý barevný filtr a bude odrážet jen vlnové délky odpovídající maximům odrazivosti. Pro vlnové délky ležící mimo maxima se nebude

odrážet téměř nic. Pokud dosáhneme toho, že v intervalu vlnových délek dopadající na rezonátor bude jen jedno maximum, bude rezonátor filtrovat jen jednu vlnovou délku. Tomuto intervalu vlnových délek říkáme volný spektrální obor.

F-P rezonátor byl použit ke zkoumání jemné struktury spektrálních čar, kdy bylo objeveno, že některé čáry prvků v magnetickém poli mají jistou strukturu. Tomuto jevu se říká Zeemanův jev.

### Laser

Nyní si konečně povíme něco o laseru [čti: lejzr]. Laser byl poprvé prakticky vyzkoušen v roce 1960 pány Ch. H. Townesem, N. G. Basovem a A. M. Prochorovem, kteří za něj dostali o čtyři roky později Nobelovu cenu za fyziku.

Je to jeden z objevů moderní kvantové optiky. Laser tedy není žádný záhadný pán, který kdysi laser vynalezl, ale zkratka z několika anglických slov: Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation, což volně přeloženo znamená zesilovač světla pracující na principu stimulované emise záření. Právě stimulovaná emise, kterou předpověděl již Albert Einstein, je na celém procesu to nejdůležitější.

Stimulovaná emise je jeden ze tří možných způsobů interakce světla a hmoty. Dalšími jsou spontánní emise a absorpce. Jak vše funguje, si vysvětlíme na jednoduchém modelu atomu s dvěma energetickými hladinami. Později naznačíme, že na principu se nic nemění, i když laser nepracuje s jednoduchými atomy, ale i se složitými organickými molekulami, které nemají jednoduché energetické hladiny, ale celé pásy hladin.

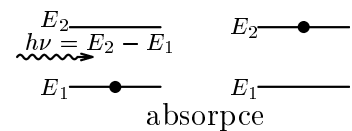
Elektron se v atomu může nacházet ve stavech s různou energií, tj. v základním stavu (stav s nejnižší energií) nebo v různě vzbuzených stavech. Vzpomeňme atom vodíku a jeho různé energetické hladiny, jejichž energie je úměrná  $-\frac{1}{n^2}$ , kde  $n$  je hlavní kvantové číslo. Pro pochopení pojmu stimulovaná emise a absorpce nám bude stačit, když budeme zkoumat dvě takovéto hladiny.

Každá hladina má tedy nějakou energii. Hodnoty jednotlivých energií nejsou pro nás příliš důležité, důležité je jejich rozdíl  $\Delta E = E_2 - E_1$ . Tak vypadá náš atom. Je velmi jednoduchý, může se nacházet ve dvou stavech s dvěma různými hodnotami energie. S ním interaguje záření, které je složené z jednotlivých fotonů. Ty mají široké spektrum barev, tedy vlnových délek a energií\*). Náš dvouhladinový atom může absorbovat nebo emitovat jen fotony s energií, rovnající se vzdálenosti hladin v atomu  $\Delta E$ .

### absorpce

Jestliže je dvouhladinový atom v základním stavu (elektron se nachází na nižší energetické hladině) vystaven působení fotonů, může dojít k tomu, že atom pohltí foton a sám se dostane do vzbuzeného stavu (obr. 9). Pravděpodobnost absorpce je přímo úměrná počtu atomů  $N_1$ , které jsou v základním stavu a hustotě záření  $\rho$  (uvažujeme jen záření na frekvenci  $\nu$ ). Koeficientem úměrnosti je Einsteinův koeficient  $B_{12}$ :

$$p_{abs} = B_{12} N_1 \rho \quad (7)$$

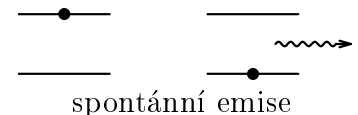


Obr. 9

### spontánní emise

V případě, že je atom ve vzbuzeném stavu, může vyzářit foton a tím ztratit energii a dostat se do základního stavu. Tento proces je čistě náhodný, foton je vyzářen do libovolného směru s libovolnou polarizací. Jediné, co je určeno, je jeho energie, která je stejná jako rozdíl energetických hladin v atomu. Pravděpodobnost je úměrná počtu atomů  $N_2$  ve vzbuzeném stavu a nezávisí na intenzitě světla. Konstantou úměrnosti je další Einsteinův koeficient  $A$ :

$$p_{spont} = A N_2 \quad (8)$$



Obr. 10

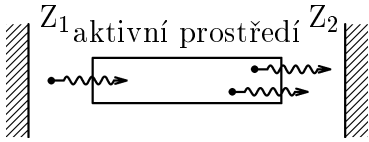
\*) Připomeňme, že energie fotonu  $E$  a jeho vlnová délka  $\lambda$ , resp. frekvence  $\nu$  spolu souvisí vztahem  $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ , kde  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  J·s je Planckova konstanta a  $c$  je rychlost světla

## stimulovaná emise

Vzbuzený atom může ztratit svou energii ještě jiným způsobem — stimulovanou emisí. Stimulovaná se jí říká proto, že je způsobena jiným fotonem. Kolem vzbuzeného atomu letí foton, který vyvolá emisi dalšího fotonu. Atom je pak v základním stavu a oba fotony mají stejný směr, polarizaci i frekvenci (foton o jiné energii než je rozdíl energetických hladin v atomu stimulovanou emisí nevyvolá).

Pravděpodobnost stimulované emise je úměrná počtu atomů  $N_2$  ve vzbuzeném stavu, hustotě záření  $\rho$  a Einsteinově koeficientu  $B_{21}$ :

$$p_{stim} = B_{21}N_2\rho \quad (9)$$



Obr. 12

Právě stimulovaná emise je základem laseru. Laser se skládá z aktivního prostředí a rezonátoru (obr. 12). Aktivní prostředí je materiál, ve kterém dochází k zesilování světla stimulovanou emisí. Když na materiál dopadne jeden foton, při průchodu aktivním prostředím vyvolá stimulovanou emisí u některého atomu a z aktivního prostředí vystoupí dva fotony. Oba mají stejný směr, polarizaci, frekvenci i fázi. Zesílení na jeden průchod není veliké, ale díky rezonátoru, což jsou vlastně dvě rovnoběžná zrcadla, je možné světlo prohnat aktivním prostředím mnohokrát a tím dosáhnout velkého zesílení. Funkce rezonátoru je zásadní. Vybírá ze všech možných směrů, ve kterých se šíří fotony, jen jeden, kolmý na zrcadla, a umožňuje fotonům s vybraným směrem vícenásobné zesílení v aktivním prostředí.

Shrňme tedy to, jak laser pracuje. Na začátku je tma a v aktivním prostředí jsou atomy ve vzbuzeném stavu. V některých atomech dojde ke spontánní emisí a vytvoří se několik fotonů. Tyto fotony se průchodem přes aktivní prostředí mohou díky stimulované emisí „rozмноžit“ a vytvořit shluky stejných fotonů. Pokud se první foton ve shluku vyzářil v nevhodném směru, vyběhne z rezonátoru nenávratně pryč i celý vygenerovaný shluk fotonů. Pokud se první foton ve shluku vyzářil do vhodného směru, je celý shluk odražen prvním zrcadlem zpět dovnitř, kde se opět zesílí v aktivním prostředí, dopadne na druhé zrcadlo, které jej odrazí zpět přes aktivní prostředí zase zpět atd.

Tak se postupně zvyšuje počet obíhajících fotonů, až jich bude tolik, že nebude třeba mluvit o jednotlivých fotonech, ale o celém světelném svazku. Jedno ze zrcadel v rezonátoru je obvykle polopropustné a přes něj odchází část světla ven z laseru a laser svítí. Protože každý paprsek, který takto opustil laser, musel projít mnohokrát tam a zpět uvnitř laseru, má světelný svazek opouštějící laser malou divergenci, tj. není příliš rozbíhavý.

Pro zesilující efekt, který převládá v průběhu činnosti laseru, je nejdůležitější stimulovaná emise. V okamžiku, kdy laser startuje, začíná laserovat, je důležitá spontánní emise. Z ní pochází první foton, který se postupným zesilováním promění v laserové světlo.

Na první pohled je laser svou funkcí jednoduchý. Ale problém může být to, aby aktivní prostředí opravdu světlo při průchodu zesilovalo. Předpokládejme, že by bylo aktivní prostředí v termodynamické rovnováze se zářením o hustotě  $\rho$ . To že je v rovnováze znamená, že již nedochází k výměně energie mezi materiálem a zářením. Neznačená to však, že by nedocházelo k emisím a absorpcím — jen emise a absorpce jsou v rovnováze. Každá emise znamená vznik jednoho fotonu a každá absorpce znamená zánik jednoho fotonu. Celkový příspěvek materiálu v rovnováze musí být nulový a tedy pravděpodobnost absorpce musí být stejná jako součet pravděpodobností obou emisí:

$$p_{abs} = p_{spont} + p_{stim}$$

$$B_{12}N_1\rho = A N_2 + B_{21}N_2\rho$$

Provedme limitu tohoto výrazu pro velké hustoty záření a velké teploty. Pro velké hustoty záření můžeme člen od spontánní emise na pravě straně zanedbat, protože ostatní členy (obsahují  $\rho$ ) mohou růst libovolně vysoko. Jedna z termodynamických pouček říká, že obsazení dvou energetických hladin, vzdálených od sebe o  $\Delta E$  je

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{\Delta E}{kT}}, \quad (10)$$

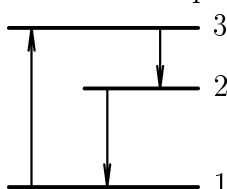
což pro vysoké teploty znamená, že obsazení obou hladin je s velkou přesností stejné ( $N_2/N_1 = e^{-\frac{\Delta E}{k\infty}} \doteq e^0 = 1$ ). To tedy znamená, že Einsteinův koeficient pro stimulovanou emisi  $B_{21}$  je stejný jako Einsteinův koeficient pro absorpci  $B_{12}$ .

Ještě jsme si neřekli, kde se bere energie v aktivním prostředí na to, aby mohlo zesilovat procházející záření. Pokud má laser pracovat kontinuálně, odchází z něj energie ve formě světla ven. Minimálně stejná energie se musí přivádět od aktivního prostředí. Tomuto přivádění energie se říká čerpání. Čerpáme totiž elektrony z nižší energetické hladiny na vyšší, podobně jako když ve vodní přečerpávací elektrárně akumulujeme energii v horní nádrži. Čerpání se provádí mnoha způsoby. Vždy se musí do aktivního prostředí dodat energie. To jde například elektrickým výbojem v plynu, průchodem elektrického proudu polovodičem, chemickou reakcí, jadernou reakcí a mnoha dalšími metodami. Nejpoužívanější metodou je optické čerpání, při kterém se svítí na aktivní prostředí z vnějšího zdroje světla. Obvykle to může být nějaká výbojka, zářivka, skupina svítivých diod a v některých speciálních případech lze čerpat laser jiným laserem.

Při konstrukci dvouhladinového laseru\*) se vyskytne jeden principiální problém. Když aktivním prostředím prochází svazek fotonů, je pravděpodobnost toho, že stimulovanou emisí vytvoří další fotony dána rozdílem pravděpodobností stimulované emise a absorpce

$$p_{zesílení} = p_{stim} - p_{abs} = BN_2\rho - BN_1\rho = B\rho(N_2 - N_1).$$

Díky tomu že je Einsteinův koeficient stejný jak pro absorpci, tak pro stimulovanou emisi, mohli jsme předcházející výraz snadno upravit a je vidět, že světlo se bude v aktivním prostředí zesilovat jen tehdy, pokud bude více atomů ve vzbuzeném stavu ( $N_2$ ), než v základním ( $N_1$ ). Pokud  $N_2 > N_1$ , mluvíme o inverzi populací, zkráceně jen o inverzi. A v inverzi je problém, protože z termodynamiky víme (10), že v rovnováze je obsazení vyšší hladiny vždy nižší než obsazení nižší hladiny. To, že nemůže dvouhladinový laser kontinuálně fungovat jde pochopit i z jednoduchého názoru. Před započítáním čerpání je vždy více atomů v základním stavu než ve vzbuzeném. V průběhu čerpání se stále více atomů dostává do vzbuzeného stavu. Když začne být množství vzbuzených atomů nezanedbatelné, začne se projevovat kromě absorpce (která může za excitaci atomů) i stimulovaná emise, která má přesně opačný efekt než absorpce – snižuje počet vzbuzených atomů. Oba procesy, které běží proti sobě se nakonec mohou vyrovnat a nastane rovnováha, při které bude skoro stejný počet atomů v základním i excitovaném stavu (díky spontánní emisí budou mírně převažovat atomy v základním stavu).



Obr. 13

Tuto malou komplikaci lze vyřešit, použijeme-li místo atomu s dvěma hladinami atom s alespoň třemi hladinami. Třetí energetická hladina je nad oběma původními hladinami. Čerpání probíhá mezi základní hladinou a třetí hladinou, ze které se atomy velmi rychle dostávají na nižší hladinu 2 a hladina je tedy neustále prázdná. Pak nemůže čerpací světelný svazek vyvolávat stimulovanou emisi a hladina 2 může mít větší obsazení než hladina 1. Vlastní laserování probíhá mezi hladinami 2 a 1.

Jeden čerpací foton se může v optimálním případě přeměnit v jeden foton na výstupu z laseru. Tyto dva fotony se ale liší svými energiemi — čerpací foton má vždy větší energii než laserovací foton. Již z tohoto důvodu nemůže mít laser 100% účinnost. Další faktory, které dále snižují účinnost přeměny dodávané energie v laserový paprsek jsou ztráty spontánní emisí a tím, že čerpací energie se nemusí využít k excitaci na správných hladinách, ale může být využita jinde. Obvykle se velká část čerpacího výkonu přemění v teplo a výkonné lasery musí být chlazené.

### Laditelné lasery

V předchozím jsme uvažovali, že energetické hladiny v atomu jsou diskrétní. To není ve většině materiálů pravda, protože každá energetická hladina je rozšířena, tj. elektron v atomu může nabývat energie z určitého intervalu hodnot a ne jen několik málo přesných hodnot. Rozšíření hladin je způsobeno mnoha důvody, například tím, že doba života hladiny je konečná, nebo že je atom vložen do krystalické mřížky, případně na něj působí tlakem okolní plyn.

\*) Název dvouhladinový laser je užíván pro laser, ve kterém se účastní procesu laserování jen dvě různé energetické hladiny. Další používané modely laserů jsou ještě o tři a čtyřhladinový.

V případě složitých organických molekul může být energetické spektrum tak složité a husté, že vznikají celé široké pásy energetických hladin. Laser může laserovat na všech frekvencích, při kterých by elektron může přecházet z libovolného místa v jednom energetickém pásu do libovolného místa v druhém pásu. Tím může být vyzařované spektrum laseru velmi široké a pokud vhodně vybereme jen některé vlnové délky, můžeme laseru „vnutit“ vlnovou délku, na které má laserovat. Pokud výběr provádíme například mřížkou nebo hranolem, můžeme vybranou vlnovou délku měnit a tak vlastně ladíme barvu laseru.

### *Módy v laseru*

Jestliže si ještě pamatujete to, co bylo na začátku tohoto dílu seriálu, jistě vám přijde povědomé, že rezonátor v laseru vypadá velmi podobně jako Fabry-Perotův rezonátor. A opravdu, je to tak. Jestliže má vlna obíhat neustále kolem dokola uvnitř rezonátoru, mělo by docházet ke konstruktivní interferenci, tj. vlna by na jeden oběh měla získat fázi rovnou celistvému násobku  $2\pi$ , což přesně říká podmínka 6. Tato podmínka jde obvykle splnit s různými celočíselnými násobky  $k$ , vždy pro různé vlnové délky. Pokud je několik takových délek v oblasti, kde aktivní prostředí zesiluje, je v laseru zesilováno několik takových vyvolených délek. Říkáme, že v laseru jsou podélné módy.

Jednotlivé módy mají různé frekvence, ale přesto jsou všechny blízké jedné centrální frekvenci. O této centrální frekvenci říkáme, že na ní laser svítí.

Modová struktura může být někdy na překážku. Pro interferometrické měření vzdáleností je potřeba pracovat jen s jednou vlnovou délkou a tak se musí potlačit všechny módy v laseru, kromě jednoho hlavního.

Někdy se však modová struktura může vhodně využít. Využívá se jí například při tvorbě ultrakrátkých laserových pulsů. Ale o tom až v dalším díle seriálu.

**Literatura:** B. E. A. Saleh, M. C. Teich: *Základy fotoniky 1, 2, 3, 4*, Matfyzpress Praha, 1995

### **Úloha IV. S ... F-P rezonátor a lasery**

a) Představte si Fabry-Perotův rezonátor se vzdáleností jednotlivých odrazných ploch  $d = 3$  mm, vyrobený ze skla o indexu lomu  $n = 1,5$ . Pro jakou nejbližší vlnovou délku  $\lambda$  500 nm dojde k maximální odrazivosti rezonátoru?

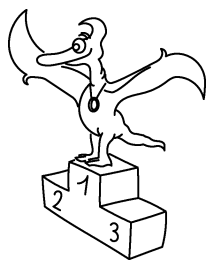
b) Uvažujte F-P rezonátor z příkladu a), na nějž dopadá světlo kolmo. Kam se bude posouvat maximum z předchozího příkladu, jestliže budeme rezonátor postupně naklánět vůči směru paprsku o malý úhel  $\alpha$ ?

c) Jakou teoreticky maximální účinnost přeměny čerpané energie lze dosáhnout u titan-safírového laseru, který svítí na vlnové délce 800 nm, jestliže ho čerpáme argonovým laserem a použijeme čerpací vlnovou délku 515 nm.

d) Jak daleko (ve frekvenční oblasti) jsou od sebe jednotlivé módy v argonovém laseru s laserovým rezonátorem o délce 1,5 m, resp. v polovodičovém laseru s délkou rezonátoru 0,3 mm. Většina plynů má index lomu blízký jedné, polovodiče mají index lomu poměrně velký, obvykle kolem 3.

Naše adresa: **FYKOS, KTF MFF UK**  
**V Holešovičkách 2, 180 00 Praha 8**  
<http://www.mff.cuni.cz/news/fks>





## Pořadí řešitelů po II. sérii



### Kategorie čtvrtých ročníků

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	5	6	S2	II	Body
	<i>Student</i>	<i>Pálný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	4	4	3	3	6	8	5	33	68
1	Petr	Klenka	oktáva A	G Praha 10	—	3	1	3	3	6	5	21	50
2	Daniel	Sprinzl	4.	G Dačice	4	3	2	3	3	3	3	21	48
3 - 4	Tomáš	Pecháček	4.P	MSŠ	3	3	2	3	3	6	4	24	42
3 - 4	Michal	Šitina	4.B	G Hr. Králové	4	3	2	3	3	3	—	18	42
5 - 7	Jan	Janský	septima	G Strakonice	1	2	1	3	—	5	4	16	41
5 - 7	Vít	Marek	4.A	G Holešov	4	4	3	3	2	4	2	22	41
5 - 7	Jan	Mysliveček	4.A	G Brno - Jaroška	4	—	2	3	2	5	3	19	41
8	Filip	Křížek	oktáva A	G Praha	4	1	1	3	1	4	3	17	40
9	Robert	Vácha	4.A	G Jihlava	4	3	1	3	2	6	1	20	39
10	Jiří	Samek	kvinta	G Semily	3	3	1	1	—	—	4	12	34
11	Miroslav	Musil	septima A	G N. Město na M.	—	3	3	3	1	3	3	16	33
12	Lenka	Zdeborová	4.A	G Plzeň	4	5	3	3	5	8	3	31	31
13	Libor	Novák			4	—	3	0	2	—	2	11	30
14	Karel	Honzl		G Podbořany	—	5	—	3	3	—	5	16	28
15	Lukáš	Poul	4.A	G Brno	—	—	—	—	—	—	—	0	26
16	Jiří	Plachý			—	—	—	—	—	—	—	0	23
17	Miroslav	Černý	septima	G K. Hora	—	—	—	—	—	—	—	0	22
18 - 19	Josef	Hala			—	—	—	—	—	—	—	0	21
18 - 19	Lukáš	Uhl	4.A	G Brno-Víd.	—	—	—	—	—	—	—	0	21
20	Jan	Holeček	4.A	G Brno - Jaroška	—	—	—	1	—	—	—	1	19
21	Michal	Fašina	septima		4	1	1	3	—	5	3	17	17
22 - 23	Ondřej	Příbyla	4.A	G Brno - Jaroška	—	—	—	—	—	—	—	0	16
22 - 23	Daniel	Vostřel	septima	G Litomyšl	—	—	—	—	—	—	—	0	16
24	Karel	Jelínek	E4.B	SPS Ostrov	—	—	—	—	—	—	—	0	11
25	Rostislav	Štaubr			—	—	—	—	—	—	—	0	10
26	Petr	Vírostko	4.A	G Frýdek-Místek	—	—	—	—	—	—	—	0	9
27 - 29	Jiří	Dvořáček	4.A	G Brno - Jaroška	—	—	—	—	—	—	—	0	8
27 - 29	Ondřej	Kafka	sexta	G Semily	—	—	—	—	—	—	—	0	8
27 - 29	Petr	Švec	4.	G Kadaň	—	—	—	—	—	—	—	0	8
30 - 31	Ivo	Chvojka			3	—	2	2	—	—	—	7	7
30 - 31	Petr	Zasche	septima	G Jablonec n. N.	—	2	—	—	—	—	1	3	7
32	Jakub	Holovský			—	—	—	—	—	—	—	0	5
33	Marie	Kuncová	4.A	G Blansko	1	2	1	—	0	—	—	4	4
34	Pavel	Kolář			—	—	—	—	—	—	—	0	3
35	Jiří	Burda			—	2	0	—	—	—	—	2	2
36	Petr	Forgács	sexta B	G Most	—	—	—	—	—	—	—	0	0

## Kategorie třetích ročníků

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	5	6	S2	II	Body
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	<i>4</i>	<i>4</i>	<i>3</i>	<i>3</i>	<i>6</i>	<i>8</i>	<i>5</i>	<i>33</i>	<i>68</i>
1	Jan	Houštěk	sexta	G Pelhřimov	4	5	3	3	6	8	5	34	71
2	Juraj	Suchár	3.	G Dubnica n. Váhom	4	5	3	—	5	6	4	27	49
3	Milan	Berta	III.A		4	2	2	3	2	6	3	22	45
4	Karel	Kouřil	kvinta B	G Blansko	4	4	3	—	2	—	3	16	38
5 - 6	Pavel	Augustinský	sexta B	G Havřírov	4	2	2	—	3	—	2	13	37
5 - 6	Miroslav	Pištek	sexta	G Sedlčany	—	2	1	3	2	3	2	13	37
7	Jan	Houfek	sexta	G Uh. Hradiště	—	3	2	—	—	6	3	14	32
8	Tomáš	Linhart	sexta	GOA Sedlčany	0	3	0	0	—	6	4	13	30
9 - 10	Jakub	Kulaviak	kvinta B	G Blansko	4	3	1	—	1	—	1	10	29
9 - 10	Tomáš	Matoušek	VI.C	G Karlovy Vary	—	4	—	3	—	5	1	13	29
11	Petr	Schimm	VI.C	G Karlovy Vary	3	0	—	3	—	6	1	13	28
12 - 13	Daniel	Fiala	5.B	G Sušice	0	—	—	2	2	—	—	4	27
12 - 13	Stanislav	Hampl	sexta	GOA Sedlčany	0	—	—	3	—	4	4	11	27
14	Lenka	Knopová	5.M	G Pardubice	4	2	—	3	—	1	—	10	26
15	Martin	Soška	sexta	G Uh. Hradiště	—	2	1	—	0	5	2	10	24
16 - 17	Martin	Kozák	sexta A	G Klatovy	—	—	—	—	—	—	—	0	19
16 - 17	Ondřej	Souček	3.	G Jablonec	—	—	3	—	—	—	—	3	19
18	David	Šumský	3.B	G Třinec	—	—	3	3	4	5	3	18	18
19 - 21	Miroslav	Bačák	sexta	G Pelhřimov	—	—	—	—	—	—	—	0	16
19 - 21	František	Kolář	kvinta	G Praha 5	—	—	—	—	—	—	—	0	16
19 - 21	Jan	Kulveit	VI.A	G Praha 8	—	—	—	—	—	—	—	0	16
22	Zbyněk	Šrubař	sexta A	G Frenštát p. R.	—	3	3	—	1	—	—	7	15
23	Jiří	Vábek	sexta	G Žďár n. Sáz.	—	—	2	3	—	—	3	8	14
24 - 26	Petr	Nachtigall	sexta A	G Frenštát p. R.	—	4	1	—	1	—	—	6	13
24 - 26	Kristina	Rochová	sexta A	G Frenštát p. R.	1	4	1	—	—	—	—	6	13
24 - 26	Jiří	Svoboda	7.A	G Praha 9	—	2	—	—	—	—	—	2	13
27	Jana	Váchová	6.	G Tábor	—	—	—	—	—	—	—	0	12
28	Klára	Maturová	sexta	G Tanvald	—	—	2	—	1	—	—	3	9
29 - 30	Marek	Libra	sexta	G Žďár n. Sáz.	—	2	1	3	—	—	2	8	8
29 - 30	Kateřina	Šetková	sexta B	G Klatovy	—	—	—	—	—	—	—	0	8
31	Lubor	Kleveta	sexta	G Uh. Hradiště	—	—	—	—	—	—	—	0	7
32 - 33	Václav	Lederer	sexta	G Vítkov	—	—	—	—	—	—	—	0	6
32 - 33	Miroslav	Vyčítal	3.	G Rychnov n. K.	—	—	—	—	—	—	—	0	6
34 - 35	Slavomír	Miškovec	3.A	G Poprad	—	—	—	—	—	—	—	0	5
34 - 35	Petr	Veselý	5.F	G Č. Budějovice	—	—	—	—	—	—	—	0	5
36	Tomáš	Kratochvíl	6.A	G Brno - Křenová	—	—	—	—	—	—	—	0	3
37 - 38	Jiří	Bočan	sexta		0	2	—	—	—	—	—	2	2
37 - 38	Pavel	Borovička	III.T	G Opatov	—	—	—	—	—	—	—	0	2
39	Lukáš	Rychnovský	kvinta B	G Blansko	0	—	—	—	0	—	—	0	0

## Kategorie druhých ročníků

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	5	6	S2	II	Body
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	<i>4</i>	<i>4</i>	<i>3</i>	<i>3</i>	<i>6</i>	<i>8</i>	<i>5</i>	<i>33</i>	<i>68</i>
1	Peter	Čendula	2.B	G Lipt. Mikuláš	4	4	2	3	4	6	5	28	54
2	Petr	Nečesal	IV.C	G M. Budějovice	4	5	3	0	4	7	5	28	50
3	Martin	Beránek	V.	G Praha 4	4	—	3	2	—	6	3	18	46
4	Ondřej	Plašil	2.B	G Praha 9	4	2	1	—	3	5	3	18	43
5	Michal	Škoda	kvinta B	G Turnov	4	—	3	3	—	7	—	17	34
6	David	Kolovratník		SPŠS Chrudim	1	4	1	—	3	6	3	18	32
7	Jaromír	Chalupský	kvinta A	G Sušice	—	2	3	2	—	7	2	16	28
8	Radim	Krupička	2.B	G Žďár n. Sáz.	4	5	0	3	—	—	2	14	25
9	Jaroslav	Tykal	2.C	G Jihlava	4	1	—	3	1	—	2	11	23
10	Pavel	Janda	kvinta	G Telč	4	3	—	—	—	—	—	7	22
11	Jakub	Chaloupka	5.A	G Brno - Křenová	4	—	2	—	3	—	—	9	20
12 - 14	Jan	Alster	sexta A	G Holešov	4	2	1	—	1	—	—	8	19
12 - 14	Hedvika	Kadlecová	2.C	G Praha 2	0	—	1	—	—	7	2	10	19
12 - 14	Jan	Pšíkal	2.F	SPŠE Pardubice	—	3	2	—	—	—	2	7	19

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	5	6	S2	II	Body
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	4	4	3	3	6	8	5	33	68
15 - 16	Michal	Tarana	2.B	G Žilina	4	—	1	3	1	—	3	12	16
15 - 16	Libor	Tomšík	2.	SPŠE Plzeň	1	—	0	0	—	—	1	2	16
17	Martin	Šimek	kvinta	G Telč	4	—	1	—	—	—	—	5	15
18 - 19	Martin	Jakl	4.D	G Pardubice	—	2	2	—	—	—	—	4	14
18 - 19	Jan	Pacák	kvinta	G	—	—	—	—	—	—	—	0	14
20 - 24	Pavel	Braška	2.D	G Bílovec	0	3	1	—	1	0	2	7	12
20 - 24	Pavel	Řezanka	2.C	G Praha 5	0	1	0	0	—	3	1	5	12
20 - 24	Marcel	Václavík	2.A	COP Hronov	4	2	1	—	0	—	—	7	12
20 - 24	Jaroslav	Vácha	kvinta	G Příbram	—	2	2	—	—	—	1	5	12
20 - 24	Pavel	Veselý	2.A	G Kolín	—	1	—	—	—	—	—	1	12
25 - 27	Dáša	Eisenmannová	2.A	G Praha 5	4	—	—	—	0	—	—	4	11
25 - 27	Antonín	Karásek	2.	G Blansko	—	—	—	—	—	—	—	0	11
25 - 27	Břetislav	Šopík	2.B	G Žďár n. Sáz.	1	—	2	—	—	—	—	3	11
28 - 30	Jan	Kratochvíl	2.K	SPŠ Praha	—	—	—	—	—	—	—	0	10
28 - 30	Jakub	Levic	VII.B	G Louny	—	—	—	—	—	—	—	0	10
28 - 30	Radek	Macháň	2.B	G Liberec	—	1	—	—	—	—	—	1	10
31 - 33	Vít	Gottwald	2.A	G Jičín	4	1	—	—	—	—	—	5	9
31 - 33	Norbert	Požár	6.A	G Bruntál	—	—	—	—	—	—	—	0	9
31 - 33	Martina	Štyková	S5.A	G K. Hora	—	—	1	—	2	—	—	3	9
34 - 36	Lukáš	Brázda	2.C	G Jihlava	0	—	1	—	—	—	—	1	8
34 - 36	Tomáš	Brezula	2.B	G Přerov	—	1	0	—	—	—	—	1	8
34 - 36	Jan	Zikán	2.E	G Praha Arab.	—	—	—	—	—	—	—	0	8
37	Adela	Grohořová	2.D	G Bardejov	—	2	1	0	—	4	—	7	7
38 - 41	Petra	Adamová	2.A	G Benešov	—	1	—	0	0	2	1	4	6
38 - 41	Hana	Besedová	2.B	G Frenštát p. R.	—	—	—	—	—	—	—	0	6
38 - 41	Petr	Hřebačka	5.A	G Brno - Křenová	—	—	—	—	—	—	—	0	6
38 - 41	Milan	Křápek	2.D	G Brno - Křenová	4	—	—	—	—	—	—	4	6
42 - 44	Petr	Novotný	2.B	G Frýdek-Místek	—	—	—	—	—	—	—	0	5
42 - 44	Lukáš	Schmiedt	2.D	G Olomouc	—	1	2	—	—	1	—	4	5
42 - 44	Michaela	Volná	2.A	G Frýdek-Místek	—	—	—	—	—	—	—	0	5
45 - 49	Jiří	Doubek	2.G	G Praha Arab.	—	—	—	—	—	—	—	0	4
45 - 49	Martin	Hejna	S2.A	SPŠE Dobruška	—	3	1	—	—	—	—	4	4
45 - 49	Lada	Plenerová	2.B	G Liberec	—	—	0	—	—	—	—	0	4
45 - 49	Vladimíra	Satrapová	2.	G Havl. Brod	—	—	—	—	—	—	—	0	4
45 - 49	Pavel	Václavek	2.	G Frýdek-Místek	—	—	—	—	—	—	—	0	4
50 - 52	Ondřej	Pánek	2.C	G Jihlava	—	—	—	—	—	—	—	0	3
50 - 52	František	Polanka	2.A	G Domažlice	—	—	—	—	—	—	—	0	3
50 - 52	Pavel	Vraspír	kvinta	G Polička	—	—	—	—	—	—	—	0	3
53	Jan	Kodovský	sexta A	G Zlín	—	—	—	—	—	—	—	0	2
54	Martin	Marec	6.B	G Bruntál	—	—	—	—	—	—	—	0	1

### Kategorie prvních ročníků

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	5	6	S2	II	Body
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	4	4	3	3	6	8	5	33	68
1	Michal	Bareš	kvarta A	G Plzeň	—	—	—	—	—	—	—	0	16
2	Matej	Dubový	1.B	G Trenčín	—	—	0	3	—	4	5	12	12
3	Ľuboš	Bednárík	1.F	G Trenčín	—	—	1	3	—	3	2	9	9
4	Roman	Mendel	IX.A	ZŠ Trenčín	—	—	0	3	—	—	—	3	8
5 - 6	Rudolf	Kopřiva	1.C	G Frýdek-Místek	—	—	—	—	—	—	—	0	7
5 - 6	Petr	Křístek	1.C	G Frýdek-Místek	—	2	0	—	0	—	—	2	7
7	Martin	Šturma	1.A	G Praha 6	—	—	2	—	—	—	1	3	6
8	Peter	Biras	1.F	G Trenčín	—	—	—	3	—	—	2	5	5
9 - 10	Alena	Julínková	1.C	G Frýdek-Místek	—	—	—	—	—	—	—	0	4
9 - 10	Jan	Kačmařík	1.A	G Frýdek-Místek	—	—	—	—	—	—	—	0	4
11	Jindřich	Štáštka	1.E	G Sokolov	—	—	—	—	—	—	2	2	3
12 - 13	Lenka	Burešová	1.C	G Praha 5	—	—	—	—	—	—	—	0	1
12 - 13	Martin	Žák	tercie M	G Praha 5	—	—	—	—	—	—	—	0	1
14 - 15	Michal	Fárka	1.C	G Praha 5	—	—	0	0	—	—	—	0	0
14 - 15	Miroslav	Krůs	1.A	G Klatovy	—	—	—	—	—	—	—	0	0