

JAN HRADIL A KOLEKTIV

# Fyzikální korespondenční seminář

XI. ročník – 1997/98





## Předmluva

Milý čtenáři,

v této ročence se již tradičně snažíme ukázat činnost FYKOSu (FYzikálního KOrespondenčního Semináře) ve školním roce 1997/98, kdy proběhl jeho již XI. ročník.

Struktura této ročenky se mírně liší od toho, jak vypadá seminář během roku. Ten vypadá tak, že řešitelé dostávají (více méně pravidelně) zadání šesti sérií úloh. Každá série obsahuje 5 teoretických úloh, 1 experimentální úlohu a kapitolu Seriálu na pokračování, což je letos povídání o moderní fyzice a kvantové teorii. Seriál je doplněn další, celkem tedy sedmou úlohou. Řešitelé řeší (jak již vyplývá z jejich názvu) tyto úlohy a poté je pošlou (ne nutně všechny) na adresu semináře. Následně organizátoři úlohy opraví, obodují a zašlou zpět řešitelům, aby si mohli prohlédnout své chyby. Na základě bodování je sestavena výsledková listina a na konci každého ročníku jsou nejlepší řešitelé po zásluze odměněni. FYKOS je především soutěž!

Toto základní schéma semináře vzniklo někdy na jeho počátku. Nejdříve se k němu přidala dvě každoroční soustředění, která jsou již neodmyslitelnou součástí semináře. Jsou odměnou nejlepším řešitelům vždy na jaře a na podzim. Další aktivitou je Den s experimentální fyzikou, kdy umožníme (ve spolupráci s jednotlivými pracovišti) našim řešitelům návštěvu několika pracovišť, kde se dělá „opravdová fyzika“.

Tolik život semináře během roku, co však ukrývá tato ročenka? Na začátku najdete kompletní zadání teoretických a experimentálních úloh. Z praktických důvodů jsme oddělili řešení teoretických úloh od experimentálních. Obojí postupně najdete za zadáním. V další části je celý Seriál na pokračování, přerušovaný jednotlivými úlohami, vážícími se k danému tématu. A pak už je jen soupiska nejlepších řešitelů a toť vše.

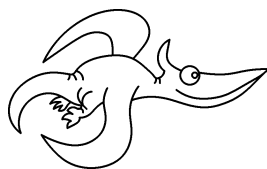
Pokud byste měli po přečtení pocit, že se chcete přihlásit k soutěžení v semináři nebo že se potřebujete na něco zeptat, ať už se to týká fyziky, studia na matfyzu či života matfyzáka, nebojte se a napište. Organizátoři jsou vám k dispozici téměř nepřetržitě na adrese

FYKOS  
KTF MFF UK  
V Holešovičkách 2  
180 00 Praha 8

e-mail: [fykos@mff.cuni.cz](mailto:fykos@mff.cuni.cz)

www: <http://www.mff.cuni.cz/iso/news/fks>

tel: (02) 2191 2493 (záznamník KTF)



## Zadání úloh

### Úloha I. 1 ... skleněný schizofrenní válec

Mějme válec, který je slepený ze dvou skleněných polovin o indexech lomu  $n_1$  a  $n_2$ . Válec se otáčí rovnoměrně kolem své osy. Na válec svítíme světelným paprskem kolmo na jeho osu rotace (viz obr. 1). Jak se bude pohybovat stopa paprsku po podložce v závislosti na úhlu natočení  $\varphi$  válce, jestliže je vzdálenost podložky od osy rotace  $d = 1$  m?

Řešení str. 11

### Úloha I. 2 ... zlaté sloupy

Dva identické zlaté sloupy výšky 200 m a průřezu  $1 \text{ dm}^2$  jsou umístěny vedle sebe. Jeden z nich je zavěšený a druhý stojí na podložce, oba mají stejnou teplotu  $0^\circ\text{C}$ . Oběma dodáme teplo  $5 \cdot 10^6$  kJ. Budou mít potom stejnou teplotu? Jestliže ne, odhadněte, o kolik se jejich teplota bude lišit. Potřebné údaje si najdete v tabulkách, tepelnou výměnu s okolím zanedbejte.

Řešení str. 13

### Úloha I. 3 ... slepičí problém

Slepice se po obědě ( $12^{00}$ ) chce dostat do kurníku. Neumí však létat, a jelikož žebřík po stěně kurníku klouže, začne bezradně běhat kolem něj. V kolik hodin se do kurníku dostane, když každou hodinu běhání shodí 40 g a ve 14 hodin hodlá snést vajíčko?

Ve  $12^{00}$  váží slepice  $m = 1,7$  kg, vajíčko má hmotnost  $m_v = 30$  g a žebřík  $M = 5$  kg. Výška kurníku nad dvorkem je  $h = 0,85$  m, sklon žebříku  $\alpha = 25^\circ$ , součinitel smykového tření mezi kurníkem a žebříkem i mezi dvorkem a žebříkem je stejný:  $f = 0,7$ .

Řešení str. 15

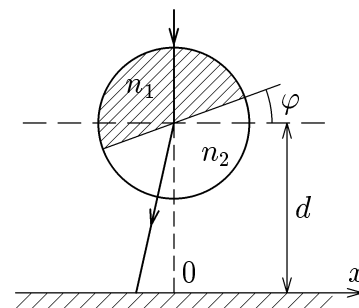
### Úloha I. 4 ... grant strýčka Skrblíka

Strýček Skrblík se jednou doslechl o perpetuech mobile a vytušil příležitost, jak ještě více zbohatnout. Vypsal grant na vymyšlení „věčných strojů“, ale jediní, kdo se přihlásili, byli jeho synovci. Přinesli strýčkovi následující tři nápady:

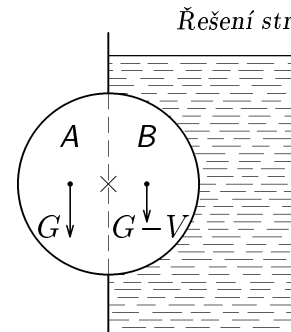
*Nápad č. 1.* Základem prvního perpetua je válec, který je dutý, vodotěsný a je upevněn v ose na valivých ložiscích. Obr. 2 nám objasní funkci stroje. Na obě části válce sice působí tíhová síla  $G$ , ale část  $B$  je vůči části  $A$  válce nadlehčována vztlakovou silou  $V$  dle Archimédova zákona. Válec se bude otáčet a jeho rotační energii převedeme na elektrickou energii.

*Nápad č. 2.* Pokud zahřejeme kapalinu, zvětší svůj objem. Zároveň víme, že kapalina je nestlačitelná. Proto budeme kapalinu zahřívat a ochlazovat, změnu jejího objemu převedeme na mechanickou energii a tu na energii elektrickou. Část takto obdržené energie využijeme na zahřívání kapaliny (ochlazení kapaliny zajistí okolní prostředí, odborně „lázeň“). Zbytek energie roztočí stroje ve Skrblíkových továrnách.

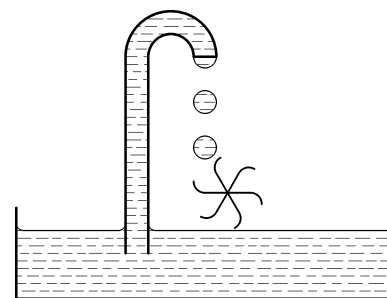
*Nápad č. 3.* Do nádoby s vodou je zasunuta kapilára. Díky kapilárním jevům voda naplní celou kapiláru a z horního zahnutého konce odkapává dolů, jak je to vidět na obr. 3. Dole je umístěna vodní turbína, která je roztáčena padající vodou, a tak může konat práci.



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

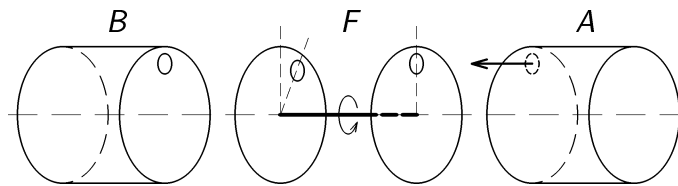
Strýček se nadšeně pustil do výroby těchto strojů, jaké však bylo jeho zklamání, když zjistil, že ani jediný z nich nefunguje. Od té doby už o žádných „perpetech“ nechce ani slyšet.

Na vás teď je, draží řešitelé, abyste se pokusili vysvětlit, proč žádný z nápadů synovců strýčka Skrblíka nemůže fungovat jako perpetuum mobile.

Řešení str. 16

### Úloha I. 5 ... je narušen druhý termodynamický princip?

Mějme aparaturu, jejíž schéma je na obrázku 4. Molekuly opouštějící nádobu s plynem  $A$  (teplota  $T_A$ , střední kvadratická rychlost molekul  $v_A$ ) tvoří molekulární svazek, jež dále prochází rychlostním filtrem  $F$ . Pouze částice s rychlostí  $v_F$  proletí až do nádoby  $B$ . V prostoru mezi deskami filtru je vakuum, střední volná dráha molekul je větší než rozměr aparatury. Při vhodné volbě rychlosti  $v_F$  ( $v_F > v_A$ ) bude teplota nádoby  $B$  vyšší než nádoby  $A$ . Tudíž teplo z tělesa chladnějšího ( $A$ ) bude přecházet na těleso teplejší ( $B$ ), což je ve sporu s druhým principem termodynamiky. Vaším úkolem je vysvětlit (ne)správnost této úvahy.



Obr. 4

Řešení str. 10

### Úloha I. 1 ... korálky

Na tyči zanedbatelné hmotnosti o celkové délce  $4a$  jsou navlečeny symetricky ve vzdálenosti  $a$  od osy otáčení (prochází středem tyče a je na ni kolmá) dvě koule, každá o hmotnosti  $m$ . Na obou koncích tyče jsou umístěny dokonale pružné odrazné destičky. Tyč je roztočena na úhlovou rychlost  $\omega_0$  a poté jsou uvolněny obě koule. Za předpokladu, že se tyč nadále pohybuje volně a bez tření a kuličky považujeme za hmotné body určete:

- Po jaké trajektorii se budou pohybovat obě kuličky vzhledem k pozorovateli v inerciální soustavě.
- Jak se bude měnit úhlová rychlost soustavy  $\omega$  v závislosti na čase.
- Jak by se změnilы výsledky předešlých úloh, kdybychom udržovali (např. pomocí motoru) úhlovou rychlost na konstantní hodnotě  $\omega_0$ .

Řešení str. 11

### Úloha I. 2 ... odraz

Gumová kulička o průměru 1 cm dopadá na ocelovou desku z výšky dvou metrů. Odhadněte řádově, jak velké bude její průměrné zrychlení během odrazu.

Řešení str. 13

### Úloha I. 3 ... ze života hmyzu

Na skleněné kouli o poloměru  $R$  sedí hladový pavouk. Nejraději jí mouchy a zrovna jedna sedí na stejné kouli. Najděte pro mouchu takovou polohu na kouli, aby jí pavouk neviděl. Předpokládejte, že pavouk má oči zhruba v jednom bodě ležícím na kouli a že moucha je vysoká  $h$ .

Řešení str. 15

### Úloha I. 4 ... kapka deště

Jeden náš řešitel, který se vracel ze soustředění za deštivého počasí vlakem domů, si všiml, že kapky na skle vytvářejí přímé stopy. Změřil, že jsou od svislého směru odkloněny o úhel  $\alpha = 35^\circ$ . Určete, jakou rychlostí jel vlak, mají-li kapky poloměr  $r = 2$  mm.

Řešení str. 16

**Úloha I. 5 ... automobily**

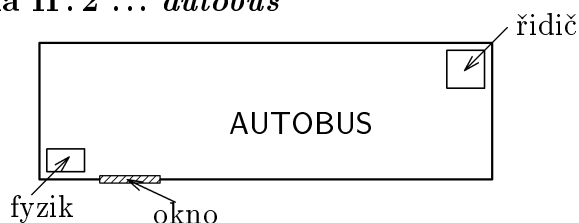
Představte si, že po přímé silnici jedou dva automobily o hmotnosti  $m$  konstantní rychlostí  $v$ . Jeden z nich pak zrychlí na rychlost  $2v$  a jeho kinetická energie se tím zvětší o  $3mv^2/2$ . Při pohledu ze soustavy spojené s druhým autem zrychlí první z nulové rychlosti na rychlost  $v$ , čímž získá kinetickou energii  $mv^2/2$ . Vysvětlete, jak je to možné, když z hlediska obou soustav by se měla uvolnit stejná energie paliva.

Řešení str. 17

**Úloha II. 1 ... jeřáb**

Jeřáb může zdvihat břemeno pouze konstantní svislou silou  $F$ . Budeme jím zvedat ze země nekonečné lano o délkové hustotě  $\lambda$ . Jakou maximální rychlost jeho horní konec během pohybu dosáhne? Jakou maximální výšku dosáhne?

Řešení str. 18

**Úloha II. 2 ... autobus**

Obr. 5



Obr. 6



Obr. 7

Při cestě autobusem se vám může přihodit následující podivná věc: Sedíte na zadním sedadle vpravo a díváte se z okna (viz obr. 5). Jelikož je noc, vidíte v něm také odraz digitálních hodin visících nad řidičem. Jede-li autobus pěkně po rovině, mají číslice odražené v okně zanedbatelnou tloušťku (viz obr. 6). Může se ale stát, že vlivem nerovností na vozovce a klepání motoru se okno rozkmitá a číslice se rozmažou tak, že vypadají 1 cm tlusté (viz. obr. 7). S jak velkou amplitudou okno kmitá? Jaká musí být minimální frekvence, abychom neviděli jednotlivé kmity číslic?

Řešení str. 19

**Úloha II. 3 ... káva a mléko**

Představte si, že jste zaspali a spěcháte. Uvaříte si kávu a máte 2 minuty na to, abyste ji vypili. Káva je horká a vy potřebujete během zmíněných 2 minut dosáhnout co nejnižší teploty. Kávu pijete samozřejmě s mlékem. Na vás je, abyste rozhodli, dosáhnete-li nižší teploty, když necháte kávu 2 minuty chladnout, pak do ní nalijete mléko, a nebo mléko nalijete co nejdříve? Nebo je výhodnější nalít mléko někdy v průběhu chladnutí? Mléko má samozřejmě pokojovou teplotu.

*Poznámka:* Předpokládejte, že předané teplo je přímo úměrné rozdílu teplot tělesa a okolí, teplota tělesa se tedy bude exponenciálně přibližovat teplotě okolí.

Řešení str. 19

**Úloha II. 4 ... válec versus kvádr**

Mějme homogenní válec a homogenní kvádr. Obě tělesa jsou vyrobená ze stejného materiálu a mají stejnou hmotnost. Hodíme je současně vedle sebe na stůl stejnou počáteční rychlostí  $v_0$  (hodíme je rovnoběžně s rovinou stolu, svislá složka rychlosti při dopadu je nulová).

Válec se na počátku neotáčí. Rozhodněte, které těleso se bude pohybovat rychleji, případně diskutujte fáze pohybu, kdyby se jejich vzájemná pozice s časem měnila. Uvažujte pohled jak silový, tak energetický.

Uvažujte, že smyková třecí síla je charakterizovaná pouze koeficientem smykového tření, tj. základní model, kdy smyková třecí síla závisí **pouze** na normálové přitlačné síle. Valivé tření neuvažujte.

Řešení str. 21

**Úloha II.5 ... záplavy ve vesmíru**

Uvažujme vesmír se stejnými fyzikálními zákony, který je však vyplněn z větší části kapalnou vodou. Ve vodě se vyskytují drobné bublinky plynu, jejichž hustota je značně menší, než je hustota vody. Budou se tyto bublinky vzájemně přibližovat nebo vzdalovat?

Řešení str. 22

**Úloha III.1 ... soutěž jehlanů**

Vezmeme dva jehlany stejných rozměrů se čtvercovou podstavou o délce podstavné hrany  $a$  a výšce  $v$ . Kromě toho, že jejich rozměry jsou stejné, i jejich hmotnost je stejná. Jeden má drátěné hrany a druhý má plechové stěny. Postavíme je vedle sebe na podložku, kterou začneme naklánět. Který z modelů se dříve překlopí? Tření je tak velké, že jehlany po podložce nebudou klouzat.

Řešení str. 24

**Úloha III.2 ... vodní hodiny**

Vodní hodiny jsou přesýpací hodiny, ve kterých se místo přesypávání písku přelévá voda. Navrhněte jejich tvar tak, aby hladina vody v horní nádobce klesala konstantní rychlostí. Vzduch je z nádobek vyčerpán.

Řešení str. 24

**Úloha III.3 ... energeticky úsporný domeček**

Stavební firma Krychle staví domy pouze krychlovitého tvaru. Její nejnovější stavba má hranu dlouhou 100 m. Jak je možné, že oproti jejich první stavbě (s hranou dlouhou 10 m) klesly značně náklady na vytápění jednoho bytu? Kolikrát? Byty se staví stále stejně velké a firma používá stále stejné suroviny.

Řešení str. 26

**Úloha III.4 ... vážení na rovníku**

Kdy ukáží pružinové váhy na rovníku větší hmotnost tělesa: v poledne nebo o půlnoci? O kolik procent se budou údaje lišit? Potřebné hodnoty vyhledejte ve fyzikálních tabulkách. Uvažujte pouze soustavu Země — Slunce (Měsíc někam odletěl).

Řešení str. 28

**Úloha III.5 ... levitující kapalina**

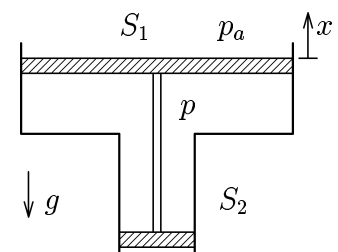
Jistě jste si už někdy všimli, že když vytahujeme skleničku z umyvadla dnem vzhůru, zůstává v ní voda až do té chvíle, kdy její okraj vytáhneme nad hladinu. Pak všechna vyteče. Vysvětlíte proč. Uvědomte si, že na povrch kapaliny ve skleničce obrácené dnem vzhůru působí tlak vzduchu, který dokáže vytlačit až 10 m vodního sloupce!

Řešení str. 28

**Úloha IV.1 ... dvojpíst**

Na obrázku 8 vidíte dva spojené písty o ploše  $S_1$  a  $S_2$  a celkové hmotnosti  $m$  zasunuté do pouzdra, které je na obou stranách otevřené. Celé zařízení je v rovnováze a je umístěno v tíhovém poli  $g$ . Vně pístů je atmosférický tlak  $p_a$ , uvnitř je 1 kmol ideálního plynu o tlaku  $p$ . O kolik stupňů Celsia musíme plyn mezi písty ohřát, aby se písty posunuly o  $x$  směrem vzhůru?

Řešení str. 30



Obr.8

**Úloha IV.2 ... hradní studna**

Řešitel Fykosu měřil hloubku hradní studny. Vzal si na pomoc stopky a kámen. Kámen vhodil do studny a současně spustil stopky. Zastavil je poté, co uslyšel náraz kamenu na dno. Stopky ukázaly údaj 4,77 s. Jelikož si náš přítel pamatoval velikost tíhového zrychlení a rychlost zvuku, ihned na místě spočítal hloubku (vyschlé) studny. Dokážete to také? Určete zároveň chybu popsání měření.

Řešení str. 30

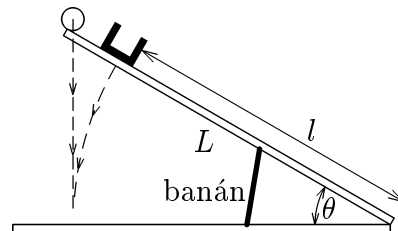
**Úloha IV.3 ... kapacitní krychle**

Spočítejte kapacitu krychle, jejíž hrany jsou tvořeny kondenzátory o kapacitě  $C$ . Uvažujte všechna tři možná zapojení krychle do obvodu.

Řešení str. 31

**Úloha IV.4 ... cvičená opice**

Novopečený majitel zoologické zahrady by měl rád v pavilonu opic následující atrakci (viz obr. 9). Na jednom ze dvou prkýnek spojených pantem je ve vzdálenosti  $l$  od pantu připevněn miniaturní košíček a na konci prkýnka (ve vzdálenosti  $L$  od pantu) je položen míček. Prkýnko je podepřeno banánem, a svírá se zemí úhel  $\theta$ . K této „aparatuře“ přijde hloupá opice (zatím nebyl čas ji vycvičit), a vezme si banán.



Obr.9

Vyvrcholením atrakce by mělo být to, že odbrzděné prkénko se dá do pohybu a míček by měl sám spadnout do košíčku. Diskutujte, zda-li je to vůbec možné a pokud ano, spočtěte jaké musí být  $l$  v závislosti na  $L$  a úhlu  $\theta$ .

Řešení str. 32

**Úloha IV.5 ... samopal**

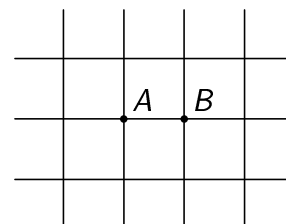
Rozhodněte jak těžkou krychli lze převrátit střelbou ze samopalu (či spíše menšího děla) o parametrech 50 střel za sekundu, rychlost střely  $500 \text{ ms}^{-1}$ , hmotnost střely 100 g. Krychle má hranu dlouhou 1 m, po podložce nekluže.

Řešení str. 32

**Úloha V.1 ... síť sítí**

Spočtěte elektrický odpor  $R$  mezi body A a B nekonečně rozlehlé čtvercové sítě (viz obr. 10). Jednotlivé úsečky tvořící síť mají odpor  $R_0$ .

Řešení str. 33



Obr.10

**Úloha V.2 ... izotop**

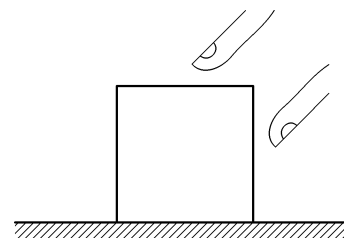
Na pracoviště nukleární medicíny byla doručena zásilka izotopu A. V dokumentech, které přišly spolu s izotopem, bylo uvedeno, že 11,5 min po vyndání z reaktoru, kde tento izotop vzniká v čisté formě, byla aktivita zásilky 1000 rozpadů  $\gamma$  za sekundu. Když přeměřil aktivitu doručené zásilky bezpečnostní technik, zjistil, že je také 1000 rozpadů  $\gamma$  za sekundu. Určete dobu transportu zásilky, když víte, že se A rozpadá  $\beta$  rozpadem s poločasem 23 minut na B, které se s poločasem 23 dní rozpadá za emise  $\beta$  a  $\gamma$  na stabilní nuklid C.

Řešení str. 34

**Úloha V.3 ... kostka**

Když se pokusíme uchopit kostku tak, jak je naznačeno na obr. 11, ne vždy se nám to povede. Určete podmínku, za které se to podaří.

Řešení str. 35



Obr.11

**Úloha V.4 ... alternátor**

Představte si rotující kovový disk (disk rotuje kolem pevné osy identické s osou rotační symetrie disku) v časově neměnném magnetickém poli tak, že vektor  $\vec{B}$  magnetické indukce pole směřuje kolmo na plochu disku. Určete napětí (měřené naprázdno) mezi kterýmikoli dvěma body disku, případně i proud, který by tekla měřícím obvodem, kdyby měřící přístroj neměl ideálně nekonečný odpor.

Řešení str. 36



**Úloha V.5 ... zastavení v zatáčce**

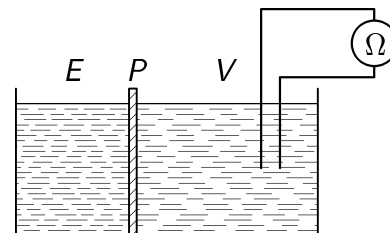
Představte si, že jednou budou u nás vlaky jezdit opravdu rychle. Nechť rychlík zastaví v oblouku o poloměru 500 m, který je klopen pro rychlost 200 km/h (tzn. že na cestující v jedoucím rychlíku působí neustále síla jen kolmo dolů). A protože lidé jsou zvědaví, vykloní se všichni z oken na vnitřní straně oblouku, aby zjistili, co se děje. Vaším úkolem je zjistit, kolik lidí musí ve vlaku být, aby se překlopil.

Vlak je složen z 10 čtyřosých rychlíkových vozů o délce 25 m, šířce 3 m, výšce 4,2 m a hmotnosti 40 t. Těžiště vozu je ve výšce 1,2 m od hlavy kolejnice, rozchod koleji je 1738 mm. Spodní okraj otevřeného okna nechť je ve výšce 2,5 m.

Řešení str. 42

**Úloha I.Exp ... měření difúze ve sklenici vody**

Námětem první experimentální úlohy je jev difúze v kapalině. V kádince je přepážkou  $P$  oddělena voda  $V$  od roztoku elektrolytu  $E$  (např. roztok kuchyňské či jiné soli), viz obr. 12. V čase  $t_0 = 0$  přepážku odstraníte a ohmmetrem budete sledovat pokles elektrického odporu s časem. Po měření vysvětlíte kvalitativně a kvantitativně pozorované změny.



Řešení str. 43

Obr.12

**Úloha II.Exp ... kadeřnictví v rukou fyzika**

Změřte pomocí fénu (ručního elektrického vysoušeče vlasů) tepelnou kapacitu vzduchu.

*Poznámka:* Připomínáme, že experimentální úloha je od slova experimentovat. Proto neváhejte a místo teoretických výpočtů se chopte fénu a opravdu si to zkuste. Kromě experimentálních zážitků budete oceněni i tím, že experimentální úloha je hodnocena tradičně více, než ostatní úlohy.

Řešení str. 45

**Úloha III.Exp ... fyzik hudebníkem**

Změřte součinitel statického tření mezi různými materiály (např. papír a dřevo). Při měření využijte gramofonu.

Řešení str. 46

**Úloha IV.Exp ... křídový prach**

Změřte poloměr zrnka křídového prachu.

*Pomůcka:* Pro velmi jemný prach můžeme měřit dobu pádu prachu na zem a za pomoci Stokesova vzorce pro odpor prostředí můžeme poloměr dopočítat.

Řešení str. 47

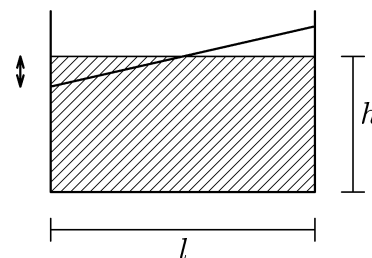
**Úloha V.Exp ... pevnost nitě**

Změřte mez pevnosti nitě v tahu. S řešením nám pošlete 1 m dlouhý vzorek vaší nitě.

Řešení str. 49

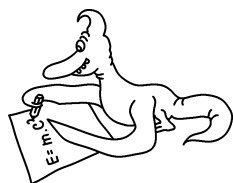
**Úloha VI.Exp ... akvárium**

Najděte si akvárium, nebo podobnou nepropustnou nádobu kvádřového tvaru a zčásti ji naplňte vodou do výšky  $h$ . Nádobou rychle pohněte ve směru jedné ze stěn, aby hladina začala kmitat tak, jak je to naznačeno na obr. 13. Změřte frekvenci, s kterou hladina kmitá, proveďte pokud možno více měření pro různé hodnoty  $h$  a  $l$  a výsledky se pokuste interpretovat (vymyslete fyzikální model). Omezte se na malé amplitudy kmitů.



Obr.13

Řešení str. 49



## Řešení teoretických úloh

### Úloha I.1 ... skleněný schizofrenní válec

Mějme válec, který je slepený ze dvou skleněných polovin o indexech lomu  $n_1$  a  $n_2$ . Válec se otáčí rovnoměrně kolem své osy. Na válec svítíme světelným paprskem kolmo na jeho osu rotace (viz obr. 14). Jak se bude pohybovat stopa paprsku po podložce v závislosti na úhlu natočení  $\varphi$  válce, jestliže je vzdálenost podložky od osy rotace  $d = 1$  m?

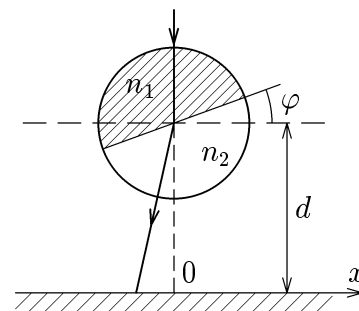
#### Řešení:

Nechť  $n_1 > n_2$  (lze zvolit bez újmy na obecnosti). Válec rotuje, poloviny se periodicky střídají nahoře a dole.

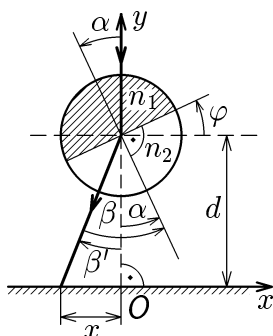
Ze zadání vyplývá, že k lomu nebo odrazu bude docházet pouze na rozhraní dvou prostředí ve válci. Pro popis lomu použijeme Snellův zákon:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta,$$

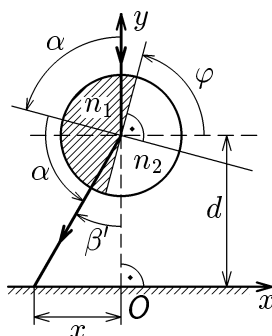
kde  $\alpha$  je úhel dopadu a  $\beta$  úhel lomu (viz obrázky). Všechny úhly jsou orientované (tzn. mohou mít kladné i záporné znaménko). Kladný směr uvažujeme ve směru otáčení válce.



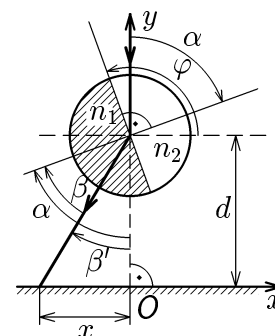
Obr. 14



Obr. 15



Obr. 16



Obr. 17

$\varphi$  — úhel natočení válce,  $\alpha$  — úhel dopadu paprsku,  $\beta$  — úhel lomu,  $\beta'$  — úhel od osy  $y$

Protože  $n_1 > n_2$ , při jistém mezním úhlu  $\alpha_m = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$  nastane na rozhraní úplný odraz. Když se bude úhel  $\phi$  přibližovat k meznímu úhlu  $\alpha_m$ , budou se po podložce pohybovat stopy dvou paprsků — odraženého a lomeného. Intenzita lomeného paprsku se bude snižovat (při  $\varphi = \alpha_m$  zmizí stopa úplně) a intenzita odraženého paprsku se bude zvyšovat, při  $\varphi = \alpha_m$  dosáhne intenzity dopadajícího paprsku.

Rozdělme tedy řešení na několik částí:

- i) **Lom od kolmice.** Pro  $0 < \varphi < \alpha_m$  je situace znázorněna na obr. 15. Dále je  $\alpha = \varphi$  a ze Snellova zákona dostáváme:

$$\beta = \arcsin \left( \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha \right) = \arcsin \left( \frac{n_1}{n_2} \sin \varphi \right).$$

Z obrázku  $\beta' = \varphi - \beta$ . Potom platí  $\tan \beta' = \frac{x}{d}$  a z toho snadnou úpravou vychází vztah pro  $x$

$$x = d \tan \beta' = d \tan \left[ \varphi - \arcsin \left( \frac{n_1}{n_2} \sin \varphi \right) \right].$$

Z obrázku vidíme, že  $x < 0$ .

- ii) **Úplný odraz.** Pro  $\alpha_m \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi$  nebude docházet k lomu, ale k úplnému odrazu, jak je znázorněno na obr. 16. Úhel dopadu  $\alpha$  je roven úhlu odrazu. Je-li  $\alpha_m \leq \pi/4$ , tak pro úhel  $\alpha_m \leq \varphi \leq \pi/4$  se paprsek odráží tak, že nedopadá na podložku. V ostatních případech platí  $\alpha = \varphi$ ,  $\beta' = 2\varphi - \pi$  a

$$x = d \operatorname{tg} \beta' = d \operatorname{tg}(2\varphi - \pi) = d \operatorname{tg}(2\varphi)$$

V tomto případě  $x < 0$ .

- iii) **Lom ke kolmici.** Pokud  $\frac{1}{2}\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$ , paprsek nejdřív vstupuje do prostředí s indexem lomu  $n_2$  a pak se láme ke kolmici do prostředí s indexem lomu  $n_1$ . Situace je znázorněna na obr. 17. Protože úhel dopadu  $\alpha = \varphi - \pi$ , pro úhel lomu  $\beta$  ze Snellova zákona dostáváme

$$\beta = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1} \sin(\varphi - \pi)\right) = -\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1} \sin \varphi\right).$$

Z obrázku 17  $\beta' = \varphi - \pi - \beta$ , dostáváme pro polohu stopy paprsku

$$x = d \operatorname{tg} \beta' = d \operatorname{tg}(\varphi - \pi - \beta) = d \operatorname{tg}(\varphi - \beta) = d \operatorname{tg}\left[\varphi + \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1} \sin \varphi\right)\right].$$

Pro  $\frac{1}{2}\pi < \varphi < \pi$  bude  $x < 0$ . V případě, že  $\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$ , bude  $x > 0$ .

- iv) **Úplný odraz.** Pro  $\frac{3}{2}\pi \leq \varphi \leq 2\pi - \alpha_m$  je situace podobná jako na obr. 16 v případě ii). Pro  $\alpha_m \leq \varphi \leq \frac{1}{4}\pi$ , když  $\alpha_m \leq \frac{1}{4}\pi$ , paprsek na podložku nedopadne. Pro ostatní případy je úhel dopadu  $\alpha = 2\pi - \varphi$  a  $\beta' = \pi - 2\alpha = 2\varphi - 3\pi$ . Pro polohu stopy paprsku dostáváme

$$x = d \operatorname{tg} \beta' = d \operatorname{tg}(2\varphi - 3\pi) = d \operatorname{tg}(2\varphi)$$

- v) **Lom od kolmice.** Pro  $2\pi - \alpha_m < \varphi < 2\pi$  nastává podobná situace jako na obr. 15 v případě i). Úhel dopadu je  $\alpha = \varphi - 2\pi$  a úhel od osy  $y$   $\beta' = \varphi - 2\pi - \beta$ . Ze Snellova zákona

$$\beta = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \alpha\right) = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin(\varphi - 2\pi)\right) = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \varphi\right).$$

Pro polohu stopy paprsku dostáváme

$$x = d \operatorname{tg} \beta' = d \operatorname{tg}(\varphi - \beta) = d \operatorname{tg}\left[\varphi - \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \varphi\right)\right]; x > 0.$$

Vidíme, že tentokrát, na rozdíl od případu i), je  $x > 0$ .

### Úloha I.2 ... zlaté sloupy

Dva identické zlaté sloupy výšky 200 m a průřezu 1 dm<sup>2</sup> jsou umístěny vedle sebe. Jeden z nich je zavěšený a druhý stojí na podložce, oba mají stejnou teplotu 0°C. Oběma dodáme teplo 5.10<sup>6</sup> kJ. Budou mít potom stejnou teplotu? Jestliže ne, odhadněte, o kolik se jejich teplota bude lišit. Potřebné údaje si najděte v tabulkách, tepelnou výměnu s okolím zanedbejte.

#### Řešení:

Pro jednoduchost budeme všechny materiálové konstanty považovat za neměnné v závislosti na teplotě.

Správně bychom měli nejprve ověřit, že nedojde k přetržení/zhroucení sloupu vlastní vahou (porovnání napětí s mezí pevnosti; v našem případě se sloup nepřetrhne:  $\sigma_{mez} =$

$1,5 \cdot 10^8 \text{ Pa} > 3,9 \cdot 10^7 \text{ Pa}$ , což je největší tah/tlak vyskytující se ve sloupech) a nebo roztátí sloupu (teplota tání zlata je asi  $1064 \text{ }^\circ\text{C}$ , teplota sloupů asi  $1000 \text{ }^\circ\text{C}$ ).

Sloupy vizuálně shodné po zavěšení resp. postavení byly původně jinak dlouhé a tudíž se jejich hmotnosti liší. Dodáním stejného tepla se jejich teplota zvýší různě. Sloupy se dále tepelně roztáhnou a změní tak polohu svého těžiště (u visícího sloupu těžiště klesne, u stojícího se zvedne), na což připadá jistá změna potenciální energie a teplo zbylé na ohřátí se bude u obou sloupů lišit.

Nejprve si spočteme hmotnostní rozdíl mezi sloupy. To je vcelku jednoduché, pokud dokážeme spočítat rozdíl délek sloupů, kdybychom je položili vedle sebe na vodorovnou podložku — tj. bez tíhové deformace. Označme tento rozdíl  $H$ . Rozdíl hmotností je pak

$$\Delta m = S \rho H,$$

( $S$  je plocha průřezu sloupu,  $\rho$  hustota zlata.)

Nyní, pro výpočet  $H$ , potřebujeme popsat deformaci způsobenou tíhou. Je zřejmé, že sloup, který je zavěšen, se po hypotetickém položení na vodorovnou podložku trochu zkrátí, tj. bude mít délku  $(l - \Delta L)$ , zatímco sloup, který stál se prodlouží na  $(l + \Delta L)$ .<sup>1</sup> Zde nám to trochu usnadní práci, protože pokud spočteme deformaci jen např. visícího sloupu, tak víme, že deformace stojícího sloupu bude stejná až na znaménko a  $H$  se tak bude rovnat  $2\Delta L$ . Dále se tedy zabýváme jen visícím sloupem.

Velikost  $\Delta L$  (tak, jak jsme ho zavedli, bude  $\Delta L$  kladné) spočteme s pomocí modifikovaného<sup>2</sup> Hookova zákona ( $\Delta F$  je změna působící síly)

$$\Delta \sigma = \Delta F / S = E \Delta \varepsilon.$$

Ten říká, že pokud se mírně změní napětí  $\sigma$  ve sloupu, tak se deformace sloupu  $\varepsilon$  mírně změní a že tato změna deformace je v prvním přiblížení přímo úměrná změně napětí (koeficient úměrnosti  $E$ ). Je potřeba si zde uvědomit, že tomuto zákonu je vcelku jedno, jak moc je velké napětí ve sloupu, ale zabývá se jen *změnou* napětí a dává nám jen *změnu* deformace. To se nám zde velmi hodí, protože ve visícím sloupu existuje v každém místě napětí (je tahového charakteru — řekněme záporné; nulové ve spodním konci sloupu, nejzápornější v místě závěsu) ještě předtím, než se sloupem něco uděláme, tj. než ho položíme.

Abychom mohli popsat napětí v zavěšeném sloupu, zavedeme souřadnici  $x$  podél výšky sloupu ( $x = 0$  pro dolní konec a  $x = l$  pro horní). Pak napětí v každém místě zavěšeného sloupu lze vyjádřit jako  $f(x)$ :

$$\sigma = F / S = -\rho x g,$$

Uvědomíme-li si, že položením sloupu se napětí ve všech bodech změní na nulu, hned vidíme, že  $\Delta \sigma$  v každém bodě sloupu vzniklá jeho položením je rovna  $-\sigma$ . Celková změna délky sloupu pak je (jako bychom aplikovali Hookův zákon na každý malinký element sloupu, podívali se na změnu jeho délky a tyto změny sečetli):

$$\Delta L = \int_0^l \Delta \varepsilon dx = \frac{\rho g}{2E} l^2.$$

Z toho

$$H = 2\Delta L = \frac{\rho g}{E} l^2 \quad \text{a} \quad \Delta m = S \frac{\rho^2 g}{E} l^2$$

<sup>1</sup>Každému místu na visícím sloupu můžeme přiřadit místo na stojícím sloupu tak, aby platilo  $|\Delta \sigma_v| = |\Delta \sigma_s|$  (jsou to body, pro něž platí  $x_v + x_s = l$ ). Pro tyto *souměrné* body tedy platí  $|\Delta \varepsilon_v| = |\Delta \varepsilon_s|$ . A integrací (posčítáním dílčích deformací) jistě dostaneme  $|\Delta L_s| = |\Delta L_v|$ .

<sup>2</sup>Hookův zákon se obvykle uvádí ve formě  $E\varepsilon = \sigma$ . Pokud napíšeme pod sebe dvě rovnice pro dvě různá napětí a odečteme jednu od druhé, dostaneme  $E\varepsilon_1 = \sigma_1$ ,  $E\varepsilon_2 = \sigma_2$ ,  $E(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = \sigma_2 - \sigma_1$ , v našem označení přesně to, co jsme chtěli.

(číselně vychází  $H \doteq 10$  cm,  $\Delta m \doteq 19$  kg).

Ujasnili jsme si tedy, jak se liší hmotnosti obou sloupů. Nyní můžeme konečně přistoupit k očekávanému zahřátí obou sloupů. V důsledku dodání tepla  $Q$  se teplota sloupů zvýší o  $\Delta t_s$  — stojící,  $\Delta t_v$  — visící. Zároveň se oba sloupy protáhnou a tím změni polohu svého těžiště (potažmo i potenciální energii). Visící sloup ji sníží a stojící zvýší. Celková energetická bilance sloupů je vyjádřena rovnicí:

$$Q = m_{s,v} c \Delta t_{s,v} \pm \frac{1}{2} m_{s,v} g \Delta l_{s,v},$$

kde  $\Delta l = \alpha l \Delta t_{s,v} \doteq 2,8$  m ( $\alpha$  je koeficient délkové teplotní roztažnosti).

Rozdíl teplot sloupů je tedy

$$\delta T = \Delta t_v - \Delta t_s,$$

$$\delta T = 2Q \left( \frac{1}{m_v(2c - l\alpha g)} - \frac{1}{m_s(2c + l\alpha g)} \right)$$

a po úpravě ( $m_s + m_v \doteq 2m$ ,  $m_s m_v \doteq m^2$ )

$$\delta T = 4Q \frac{c\Delta m + l\alpha g m}{m^2(4c^2 - l^2\alpha^2 g^2)}.$$

Pro zadané hodnoty si čtenář laskavě ověří, že platí  $c \gg l\alpha g$  a můžeme si dovolit zanedbat druhý člen ve jmenovateli. Dosaďme ještě  $m = Sl\rho$ .

$$\delta T = Qg \frac{c\rho + \alpha E}{c^2 S E \rho},$$

což je vytoužený vzorec, do kterého stačí pouze správně dosadit správné hodnoty:  $l = 200$  m;  $S = 0,01$  m<sup>2</sup>;  $\rho = 19300$  kg·m<sup>-3</sup>;  $\alpha = 1,4 \cdot 10^{-5}$  K<sup>-1</sup>;  $c = 129$  J·kg<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup>;  $E = 8 \cdot 10^{10}$  Pa;  $g = 10$  m·s<sup>-2</sup>. Vyjde pak

$$\delta T = 0,7^\circ\text{C}.$$

Závěrem dlužno podotknout, že tento výsledek je zjevně pouze hypotetický a reálně neměřitelný. Změna  $0,7^\circ\text{C}$  je v porovnání s teplotou sloupů  $1000^\circ\text{C}$  příliš malá na její registraci. Dále neuvažování změn materiálových konstant může vést až k situaci, že to co jsme spočítali, nemá už vůbec žádnou reálnou reprezentaci, neboli že se dějí věci úplně jiné, než předpokládáme.

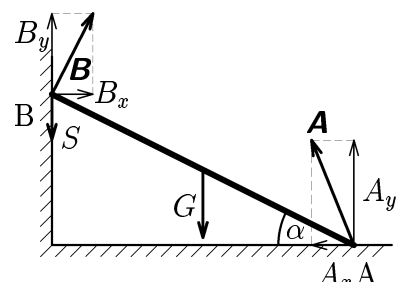
### Úloha I.3 ... slepičí problém

Slepice se po obědě (12<sup>00</sup>) chce dostat do kurníku. Neumí však létat, a jelikož žebřík po stěně kurníku klouže, začne bezradně běhat kolem něj. V kolik hodin se do kurníku dostane, když každou hodinu běhání shodí 40 g a ve 14 hodin hodlá snést vajíčko?

Ve 12<sup>00</sup> váží slepice  $m = 1,7$  kg, vajíčko má hmotnost  $m_v = 30$  g a žebřík  $M = 5$  kg. Výška kurníku nad dvorkem je  $h = 0,85$  m, sklon žebříku  $\alpha = 25^\circ$ , součinitel smykového tření mezi kurníkem a žebříkem i mezi dvorkem a žebříkem je stejný:  $f = 0,7$ .

#### Řešení:

Tíhu žebříku označme  $G$  a tíhu slepice  $S$ . Síla  $S$  nejvíce přispívá ke smykovým silám v B a nejméně k přítláčným silám v A, pokud působí v bodě B, a proto se budeme dále zabývat jen tímto případem. Čím je tato síla větší, tím více ohrožuje stabilitu žebříku, hledáme proto maximum pro  $S$ . Aby byl žebřík v rovnováze, musí na něj působit na koncích



síly  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ , pro jejichž průměty do vodorovného a svislého směru (viz obr. 18) platí

$$A_x = B_x, \quad A_y + B_y = G + S. \quad (1)$$

Moment těchto sil vzhledem k ose<sup>3</sup> kolmé k nárysně a procházející těžištěm žebříku<sup>4</sup> musí být rovněž nulový, a tak

$$(B_y - S) \cos \alpha + B_x \sin \alpha = A_y \cos \alpha - A_x \sin \alpha, \quad (2)$$

tedy

$$B_y - S + B_x \operatorname{tg} \alpha = A_y - A_x \operatorname{tg} \alpha. \quad (3)$$

Konečně při maximální hodnotě  $S$ , kdy ještě žebřík nepadne, platí

$$f B_x = B_y, \quad f A_y = A_x. \quad (4)$$

Řešením výše uvedených pěti rovnic pro pět neznámých  $A_x, A_y, B_x, B_y, S$  získáme hledanou hodnotu  $S$ : z rovnic (1,4) vzájemným dosazováním vyjádříme  $A_x, A_y, B_x, B_y$  pomocí  $f, G, S$ :

$$A_y = \frac{G + S}{1 + f^2}, \quad B_y = \frac{(G + S)f^2}{1 + f^2}, \quad B_x = \frac{(G + S)f}{1 + f^2}, \quad A_x = \frac{(G + S)f}{1 + f^2};$$

$A_y$  bylo vyjádřeno z (4) po dosazení  $B_x = A_x$  ( $f^2 A_y = B_y$ ) a dále z 2. rovnice (1), další je již snadné. Nyní dosadíme vše do (3) a vypočteme  $S$  a hmotnost slepice  $m_S$  ( $G = Mg, S = m_S g$ ):

$$S = G \frac{f^2 + 2f \operatorname{tg} \alpha - 1}{2(1 - f \operatorname{tg} \alpha)} \implies m_S \approx 530 \text{ g.}$$

Do dvou hodin určitě slepice tolik nezhubne, takže odtučňovací kúra bude trvat  $(1,7 - 0,03 - 0,53)/0,04 \text{ h} \approx 28 \text{ h } 31 \text{ min}$  za předpokladu, že již dále nic nesnese ani nepozře. Zdecimovaný pták tedy na hřad usedne až druhý den kolem půl páté odpoledne.

Závěrem jeden námět pro další bádání: zkuste položit  $S = 0$  a vyšetřete, jaké síly  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  pak působí na žebřík. Z výše uvedeného vidíme, že žebřík neuklouzne, a tedy budou v (4) místo rovností platit pouze nerovnosti  $\geq$ . Zamyslete se nad ději, ke kterým může dojít při ustavování rovnováhy.

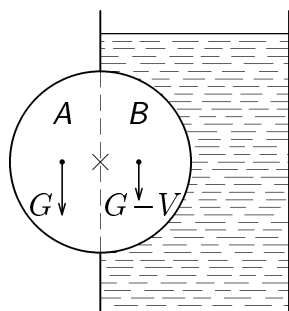
#### Úloha I.4 ... grant strýčka Skrblíka

Strýček Skrblík se jednou doslechl o perpetuech mobile a vytušil příležitost, jak ještě více zbohatnout. Vypsal grant na vymýšlení „věčných strojů“, ale jediní, kdo se přihlásili, byli jeho synovci. Přinesli strýčkovi následující tři nápady:

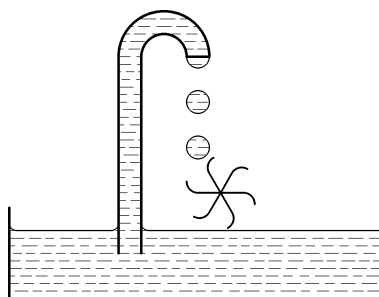
*Nápad č. 1.* Základem prvního perpetua je válec, který je dutý, vodotěsný a je upevněn v ose na valivých ložiscích. Obr. 19 nám objasní funkci stroje. Na obě části válce sice působí tíhová síla  $G$ , ale část  $B$  je vůči části  $A$  válce nadlehčována vztlakovou silou  $V$  dle Archimédova zákona. Válec se bude otáčet a jeho rotační energii převedeme na elektrickou energii.

<sup>3</sup> $M = rF \sin \varphi$ , pokud rameno  $r$  se silou  $F$  svírá úhel  $\varphi$ .

<sup>4</sup>Rovnice pro moment sil vzhledem k ose procházející jiným bodem je s (1), (2 a (3) závislá, tj. lze ji získat sčítáním a odčítáním (vhodných násobků) těchto rovnic.



Obr. 19



Obr. 20

*Nápad č. 2.* Pokud zahřejeme kapalinu, zvětší svůj objem. Zároveň víme, že kapalina je nestlačitelná. Proto budeme kapalinu zahřívat a ochlazovat, změnu jejího objemu převedeme na mechanickou energii a tu na energii elektrickou. Část takto obdržené energie využijeme na zahřívání kapaliny (ochlazení kapaliny zajistí okolní prostředí, odborně „lázeň“). Zbytek energie roztočí stroje ve Skrblíkových továrnách.

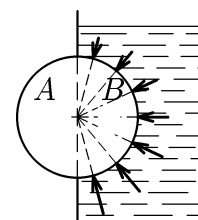
*Nápad č. 3.* Do nádoby s vodou je zasunuta kapilára. Díky kapilárním jevům voda naplní celou kapiláru a z horního zahnutého konce odkapává dolů, jak je to vidět na obr. 20. Dole je umístěna vodní turbína, která je roztáčena padající vodou, a tak může konat práci.

Strýček se nadšeně pustil do výroby těchto strojů, jaké však bylo jeho zklamání, když zjistil, že ani jediný z nich nefunguje. Od té doby už o žádných „perpetech“ nechce ani slyšet.

Na vás teď je, draží řešitelé, abyste se pokusili vysvětlit, proč žádný z nápadů synovců strýčka Skrblíka nemůže fungovat jako perpetuum mobile.

### Řešení:

*Nápad č.1* Část *B* je skutečně nadlehčována vztlakovou silou, ale je třeba mít na paměti, že je to jen jedna složka síly tlakové. Archimedův zákon je odvozen pro těleso zcela ponořené, maximálně plovoucí. Tam se horizontální složky tlakových sil, působících kolmo na povrch tělesa, odečtou. V našem případě zde ovšem horizontální složka zůstává, a to, že její otáčivé účinky se právě vyruší s účinky síly vztlakové, dokážeme nejlépe přímo z Pascalova zákona. Tlaková síla působí v každém bodě kolmo na povrch tělesa, což ovšem u válce znamená, že její vektorová přímka protíná osu otáčení a tudíž moment síly je nulový. Platí-li to pro sílu v každém bodě povrchu, platí to i pro součet těchto sil. Válec se neroztočí.



Obr.21

*Nápad č.2* Zde budeme vycházet z 1. termodynamického zákona

$$\Delta U = Q + W',$$

kde  $\Delta U$  je změna vnitřní energie kapaliny,  $Q$  je dodané teplo a  $W'$  práce vykonaná rozepnutím kapaliny. Platí

$$\Delta U = mc\Delta T,$$

$$W' = pV_0\beta\Delta T,$$

kde  $m$ ,  $p$  jsou hmotnost a tlak nějakého média v hypotetickém tepelném stroji. Z toho

$$mc\Delta T = Q + pV_0\beta\Delta T,$$

$$\Delta T = \frac{Q}{mc - pV_0\beta}$$

Dosadíme do  $W'$ :

$$W' = Q \frac{pV_0\beta}{mc - pV_0\beta}$$

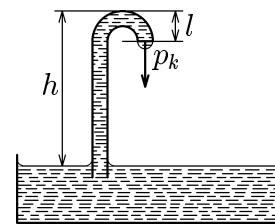
Koná-li práci kapalina, platí  $pV_0\beta < 0$ , z čehož vyplývá, že člen za  $Q$  bude v absolutní hodnotě vždy menší než jedna, a proto práce, kterou využijeme na opětovné ohřátí kapaliny, je menší než původně dodané teplo, a tak zařízení nemůže fungovat. Nejdůležitější ztrátou je  $\Delta U$  odevzdaná lázni.

*Nápad č.3* Problém nalezneme ve chvíli, kdy analyzujeme, co se děje těsně před hypotetickým ukápnutím vody (předpokládejme, že ohyb je dostatečně nízko nad hladinou, aby ho voda překonala). Má-li se na konci kapiláry uvolnit kapka, je nutné, aby se zakřivení povrchu kapaliny změnil z konkávního na konvexní.

Napišme si rovnici pro hydrostatické a kapilární tlaky, která platí při rovnováze

$$g\rho h = g\rho l + \frac{2\sigma}{R}$$

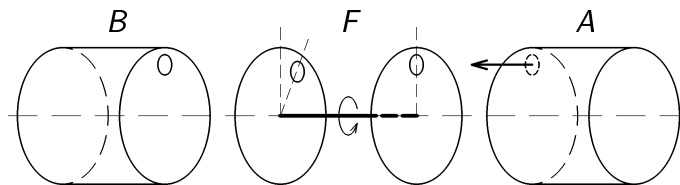
Je zřejmé, že voda může vytékat pouze v případě, kdy kapilára končí až pod hladinou vody v nádobě ( $l > h$ ).



Obr.22

### Úloha I.5 ... je narušen druhý termodynamický princip?

Mějme aparaturu, jejíž schéma je na obrázku 23. Molekuly opouštějící nádobu s plynem  $A$  (teplota  $T_A$ , střední kvadratická rychlost molekul  $v_A$ ) tvoří molekulární svazek, jež dále prochází rychlostním filtrem  $F$ . Pouze částice s rychlostí  $v_F$  proletí až do nádoby  $B$ . V prostoru mezi deskami filtru je vakuum, střední volná dráha molekul je větší než rozměr aparatury. Při vhodné volbě rychlosti  $v_F$  ( $v_F > v_A$ ) bude teplota nádoby  $B$  vyšší než nádoby  $A$ . Tudíž teplo z tělesa chladnějšího ( $A$ ) bude přecházet na těleso teplejší ( $B$ ), což je ve sporu s druhým principem termodynamiky. Vaším úkolem je vysvětlit (ne)správnost této úvahy.



Obr. 23

### Řešení:

Znění druhého termodynamického zákona, které je použitelné při řešení této úlohy je „Teplo nemůže cyklicky přecházet z tělesa studenějšího na chladnější“. Zesílené tvrzení „Není možný samovolný přechod tepla ze studenějšího tělesa na těleso teplejší“ obecně neplatí.

Na počátku je v nádobě  $A$  tlak plynu  $p_A$  a teplota  $T_A$ . Ventil mezi nádobou  $A$  a filtrem je uzavřen. Teplota nádoby  $B$  (jejích stěn) je  $T_B$  a v nádobě je vakuum. Roztočíme rychlostní filtr, práce k tomu potřebná není z termodynamického hlediska významná. Otevřeme ventil mezi nádobou  $A$  a filtrem. Dále je nutné uvážit několik procesů:

- Filtr je pro částice z  $A$  uzavřen. Částice dopadnou na povrch prvního rotujícího disku, jistý čas  $\tau$  na něm zůstanou a poté se odrazí a letí dál (takto se vysvětluje z mikroskopického hlediska mimo jiné difúze). V případě, že se částice okamžitě odrazí, nebude filtr plynem vůbec bržděn. V opačném případě bude nutné stále konat jistou práci na udržení konstantních otáček filtru.
- Filtr je otevřen. Dostatečně rychlé částice s rychlostí  $v_F$  projdou filtrem do nádoby  $B$ . Zde při nárazech na stěny ji předají část své energie a nádobu opouštějí ve směru od filtru. Teplota nádoby  $B$  bude vyšší než nádoby  $A$ .



- Filtr je uzavřen. Částice, které zůstaly v prostoru filtru, jsou buď rozptýleny do okolního prostoru (filtr je možno modifikovat tak, aby v něm částice nezůstávaly, vzroste však moment síly působící proti rotaci filtru). nebo po odrazech od disků filtru dostanou při dalším otevření filtru možnost proniknout do nádoby B (částice s poloviční, třetinovou, ... rychlostí  $v_F$ . Těchto částic je méně a jejich příspěvek v tepelné výměně není významný).

Celý děj je tak možné považovat za expanzi plynu z nádoby A přes filtr. Nyní uvedeme důvody, proč uvedený experiment není ve sporu s druhým termodynamickým zákonem (dále II. TZ).

1. Tento děj není cyklický a není tak splněn požadavek platnosti II. TZ.

*Uvedený požadavek je nutný. Při expanzi reálného plynu se jeho teplota může zvýšit a plyn tak může předat teplo tělesu s teplotou vyšší, než jaká byla teplota plynu na počátku (viz Joule–Thomsonův jev).*

2. Filtr je v průběhu expanze brzděn a pro udržení konstantní úhlové rychlosti je nutné konat práci. Zde není spor ani se zesíleným tvrzením II. TZ. (jedná se o poněkud netradiční tepelné čerpadlo).

*Poznámka:* Možná vás napadne uvažovat zpětný tok částic z nádoby B do A. Uvedený proces je však velmi nepravděpodobný. Rychlostní filtr propustí z B do A částice s rychlostí mnohem menší než je  $v_F$ . Částice z nádoby B jsou téměř jistě rozptýleny do prostoru v okolí filtru.

### Úloha II.1 ... korálky

Na tyči zanedbatelné hmotnosti o celkové délce  $4a$  jsou navlečeny symetricky ve vzdálenosti  $a$  od osy otáčení (prochází středem tyče a je na ni kolmá) dvě koule, každá o hmotnosti  $m$ . Na obou koncích tyče jsou umístěny dokonale pružné odrazné destičky. Tyč je roztočena na úhlovou rychlost  $\omega_0$  a poté jsou uvolněny obě koule. Za předpokladu, že se tyč nadále pohybuje volně a bez tření a kuličky považujeme za hmotné body určete:

- a) Po jaké trajektorii se budou pohybovat obě kuličky vzhledem k pozorovateli v inerciální soustavě.
- b) Jak se bude měnit úhlová rychlost soustavy  $\omega$  v závislosti na čase.
- c) Jak by se změnilы výsledky předešlých úloh, kdybychom udržovali (např. pomocí motoru) úhlovou rychlost na konstantní hodnotě  $\omega_0$ .

### Řešení:

1. Ponecháme-li soustavu po uvolnění kuliček volně se pohybovat, nebude na kuličky z hlediska vnějšího pozorovatele v inerciální soustavě působit žádná síla, a proto se budou pohybovat rovnoměrně přímočaře až do okamžiku, kdy narazí na zarážku. Protože směr rychlosti bude v tomto okamžiku svírat s tyčí úhel  $30$  stupňů, a protože ten stejný úhel bude mít rychlost vůči tyči i po odrazu, bude se kulička pohybovat po obvodu rovnostranného trojúhelníka. Závislost  $\omega(t)$  lze řešit několika způsoby, např. ze zákona zachování momentu hybnosti, řešením rovnice  $\ddot{r} = \omega^2 r$ . Zde si ukážeme tento postup: rozložíme vektor rychlosti do směru kolmého na tyč a do směru rovnoběžného s tyčí  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$ . Pro velikost  $v_{\perp}$  platí, že  $v_{\perp} = v \cos \varphi$ , a zároveň  $v_{\perp} = \omega r$ , kde  $r = \sqrt{a^2 + x^2}$  a  $x = vt$ . Pro  $\cos \varphi$  lze ovšem psát  $\cos \varphi = a/r$ , a tedy výsledně  $\omega = va/(\omega^2 + v^2 t^2)$ . Uvážíme-li nyní, že  $v = \omega_0 a$ , obdržíme výsledek  $\omega = \omega_0/(1 + \omega_0^2 t^2)$ , což je hledaný vztah.

2. Budeme-li udržovat rychlost konstantní, bude  $\omega = \omega_0$  a pro trajektorii musíme napsat rovnici  $\ddot{r} = \omega^2 r$ , jejímž řešením pro podmínky  $r(0) = a$  a  $\dot{r}(0) = 0$  je funkce  $r(t) = a \cosh(\omega_0 t)$

a  $\varphi(t) = \omega_0 t$  což jsou parametrické rovnice trajektorie kuliček. Tyto dráhy už netvoří uzavřenou křivku (jako např. trojúhelník).

### Úloha II.2 ... odraz

Gumová kulička o průměru 1 cm dopadá na ocelovou desku z výšky dvou metrů. Odhadněte řádově, jak velké bude její průměrné zrychlení během odrazu.

#### Řešení:

Ze zákona zachování energie (například) určíme, že kulička padající z výšky  $h$  bude mít těsně před dopadem rychlost  $v_0 = \sqrt{2gh}$ . Pokud není kulička ideálně pružná, bude mít po odrazu rychlost  $\varepsilon v_0$ , kde koeficient restituce  $0 \leq \varepsilon < 1$ . Snadno lze experimentálně ověřit, že třeba u „hopíku“ je rozhodně  $\varepsilon > 0,5$ . Pro řádový odhad tedy stačí uvažovat, že během nárazu se rychlost míčku změní z  $v_0$  na  $-v_0$ . Průměrné zrychlení při odrazu  $\bar{a}$  bude pak rovno

$$\bar{a} = (1 + \varepsilon)v_0/t \approx 2v_0/t,$$

kde  $t$  je doba trvání odrazu. Zjištění  $t$  je hlavním kamenem úrazu. V zadání úlohy jsme se sice ptali na řádový odhad, i ten je ovšem potřeba na něčem založit.

Předpokládáme, že kulička o původním průměru  $d$  se při nárazu deformuje do tvaru rotačního elipsoidu a podložka se nedeformuje (což mnozí správně odůvodnili srovnáním Youngových modulů pružnosti v tlaku u gumy a u oceli). Bude-li v nějakém okamžiku při nárazu výška kuličky (tj. délka její nejkratší osy) rovna  $y$ , znamená to, že „všechny rozměry kuličky ve svislém směru budou zmenšeny v poměru  $y/d$ “. Tedy pokud kuličku rozřežeme na tenké svislé nudličky, bude délka libovolné nudličky  $y_x(y/d)$ , kde  $y_x$  je délka této nudličky před nárazem. Označme „absolutní stlačení“ kuličky  $x = (d - y)/2$ . Předpokládáme-li, že materiál kuličky splňuje Hookův zákon<sup>5</sup>, bude síla, kterou působí každá taková nudlička proti stlačení, rovna

$$F_S = \sigma_S S = -SE \frac{\Delta y_x}{y_x} = -SE \frac{y_x - y_x(y/d)}{y_x} = -SE \frac{2x}{d},$$

kde  $E$  je Youngův modul pružnosti gumy v tlaku a  $S$  plocha kolmého řezu ke svislé ose nudličky. Znaménko minus říká, že síla působí proti stlačení. Pokud nepředpokládáme další jevy typu „nudličky po sobě kloužou“, můžeme celkovou sílu, kterou kulička působí na podložku, vyjádřit jako součet sil přes všechny nudličky. Protože  $F_S$  při daném stlačení závisí pouze na ploše řezu  $S$  zkoumané nudličky, bude celková síla rovna

$$F = -E \frac{\pi d^2}{4} \frac{2x}{d} = -\frac{\pi d E}{2} x.$$

Veličina  $x$  má význam výchylky těžiště kuličky od rovnovážné polohy, kdy se kulička právě dotýká podložky bez deformace. Vidíme, že tato síla je stejná jako u pružiny o tuhosti  $k = \pi d^2 E / (2d)$  (tj.  $F = -kx$ ). Je-li na takové pružině umístěno závaží o hmotnosti  $m$ , víme, že bude kmitat s frekvencí  $\omega = \sqrt{k/m}$  nezávisle na amplitudě kmitů (tedy počáteční rychlosti). V našem případě je  $m$  hmotnost kuličky ( $m = \rho \pi d^3 / 6$  při hustotě kuličky  $\rho$ ). Od prvního kontaktu s podložkou do okamžiku odskoku vykoná kulička půl kmitu, což jí bude trvat  $t = \pi/\omega$ . Celkem tedy dostáváme

$$t = \sqrt{\frac{2\pi m}{Ed}}, \quad \bar{a} = \sqrt{\frac{24Egh}{\pi^2 \rho d}}.$$

Pokud bereme  $E \approx 1,5 \times 10^6$  Pa a  $\rho \approx 1000$  kg · m<sup>-3</sup>, dostáváme  $\bar{a} \approx 2,7 \times 10^4$  ms<sup>-2</sup> (to je samozřejmě více než jen řádový odhad).

<sup>5</sup>To závisí mimo jiné na míře deformace a lze o tom dále diskutovat.

**Úloha II.3 ... ze života hmyzu**

Na skleněné kouli o poloměru  $R$  sedí hladový pavouk. Nejraději jí mouchy a zrovna jedna sedí na stejné kouli. Najděte pro mouchu takovou polohu na kouli, aby jí pavouk neviděl. Předpokládejte, že pavouk má oči zhruba v jednom bodě ležícím na kouli a že moucha je vysoká  $h$ .

**Řešení:**

Označme  $P$  bod, kde stojí pavouk,  $M$  bod, kde sedí moucha,  $S$  střed koule. Polohu bodu  $M$  budeme charakterizovat úhlem  $MSP$  (tím je bod  $M$  určen až na otočení kolem osy  $PS$ , což zjevně nevadí).

Pavouk může vidět mouchu buď přímým pohledem nebo skrz kouli. Rozeberme první případ. Protože má pavouk oči u povrchu koule, jeho „obzor“ je určen tečnou rovinou ke kouli v bodě  $P$ . Pokud moucha protne tuto rovinu, bude spatřena. Mezní polohu mouchy označme  $M_1$ . Vidíme, že pro úhel  $\varphi_1 = \angle M_1SP$  platí

$$\cos \varphi_1 = \frac{R}{R+h}.$$

Bude-li úhel  $MSP$  větší než  $\varphi_1$ , moucha nebude vidět přímým pohledem.

Paprsek se na rozhraní vzduch — sklo lomí ke kolmici, tedy úhel, pod kterým dopadá na kouli, je větší než úhel, pod kterým se lomí do koule. Proto pavouk vidí níže, než se dívá, takže existuje oblast, kam skrz kouli nikdy nedohlédne. Nejvýše uvidí, pokud se bude dívat do koule pod úhlem co nejbližším k  $90^\circ$ . Spočteme tedy onu mezní hodnotu, kdy se dívá pod úhlem  $\pi/2$ . Ze Snellova zákona platí

$$\frac{\sin(\pi/2)}{\sin \alpha} = \frac{n}{1},$$

kde  $n$  je relativní index lomu skla proti vzduchu. (Tento vztah je vlastně zároveň podmínka pro totální odraz.) Bod, kam pavouk dohlédne tímto způsobem, je na obrázku 24 označen  $M_2$ . Zbývá dopočítat úhel  $M_2SP = \varphi_2$ :

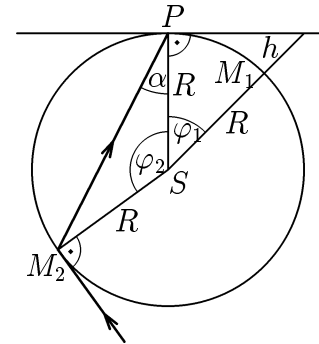
$$\varphi_2 = \pi - 2\alpha = \pi - 2 \arcsin \frac{1}{n}.$$

Bude-li úhel  $MSP$  menší než  $\varphi_2$ , pak žádný paprsek, který od mouchy projde do koule, se nemůže lomit do bodu  $P$  (to, že se pavouk dívá do koule pod nějakým úhlem znamená, že k němu přichází paprsek z dotyčného úhlu). Neuvažujeme samozřejmě situaci, kdy paprsek na rozhraní sklo — vzduch se dělí na dvě části, z nichž jedna se lomí ven a druhá se odráží dovnitř. Odraz dovnitř berme zanedbatelný.

Zbývá složit obě zjištěné podmínky. Bude-li úhel  $MSP$  zároveň větší než  $\varphi_1$  a menší než  $\varphi_2$ , pavouk mouchu neuvidí. Množina takových bodů tvoří kulový pás, pokud ovšem není prázdná. Mělo by nás zajímat, zda úloha má vůbec pro mouchu řešení, tj. zda není náhodou  $\varphi_1 > \varphi_2$ . Index lomu skla není úplně jednoznačný, záleží na druhu skla. Obvyklé hodnoty bývají od 1.5 do 1.8, v každém případě tedy větší, než  $\sqrt{2}$ . Proto  $\alpha < \pi/4$  a tedy  $\varphi_2 > \pi/2$ . Samozřejmě  $\varphi_1 < \pi/2$  pro libovolně velké  $h$ , a proto určitě platí  $\varphi_1 < \varphi_2$  nezávisle na vstupních podmínkách. Moucha tedy zaručeně má šanci.

**Úloha II.4 ... kapka deště**

Jeden náš řešitel, který se vracel ze soustředění za deštivého počasí vlakem domů, si všiml, že kapky na skle vytvářejí přímé stopy. Změřil, že jsou od svislého směru odkloněny o úhel  $\alpha = 35^\circ$ . Určete, jakou rychlostí jel vlak, mají-li kapky poloměr  $r = 2$  mm.



Obr.24

**Řešení:**

Zadání této úlohy bylo možné chápat (nejméně) dvěma způsoby: 1. varianta: Kapky padají nějakou rychlostí v blízkosti vlaku, občas nějaká z nich dopadne na okno a při dopadu za sebou zanechá stopu. 2. varianta: Jak se kapky dostaly na sklo nás nezajímá, zkoumáme děj, při němž kapky zachycené na skle sjíždějí šikmo dolů.

*Řešení 1. varianty:*

Na kapku padající z nebes na zem působí tíhová síla  $F_g = mg$  ( $m$  je hmotnost kapky,  $g$  je tíhové zrychlení) a síla odporu prostředí, kterou spočteme z Newtonova vzorce

$$F_o = \frac{1}{2}CS\rho_{vz}v_{kap}^2$$

( $C$  je konstanta,  $S$  je průřez kapky,  $\rho_{vz}$  je hustota vzduchu,  $v_{kap}$  je okamžitá rychlost kapky).

Určení tvaru kapky (a tím i jejího  $S$  a  $C$ ) je poměrně obtížné. Pro zjednodušení jej budeme považovat za kulový. Pak bude  $S = \pi r^2$ ,  $C = 0,48$  a objem kapky  $V = 4/3\pi r^3$ . Její hmotnost je pak  $m = 4/3\pi r^3\rho_{kap}$  ( $\rho_{kap}$  je hustota vody).

Kapka je zpočátku svého pohybu urychlována tíhovou silou, zároveň však narůstá odporová síla. Poté, co se tyto dvě síly vyrovnají, padá kapka s konstantní rychlostí, kterou spočteme z rovnosti  $F_g = F_o$ . Když dosadíme za  $m$  a  $S$ , dostaneme

$$v_{kap} = \sqrt{\frac{8rg\rho_{kap}}{3C\rho_{vz}}}$$

Podle zadání platí pro  $v_{kap}$  a  $v_{vlak}$  (rychlost vlaku)  $\text{tg } \alpha = v_{vlak}/v_{kap}$ . Z toho dopočítáme

$$v_{vlak} = \text{tg } \alpha \sqrt{\frac{8rg\rho_{kap}}{3C\rho_{vz}}}$$

Když dosadíme číselné hodnoty  $\alpha = 35^\circ$ ,  $r = 2,0$  mm,  $\rho_{kap} = 1000$  kgm<sup>-3</sup>,  $g = 9,8$  ms<sup>-2</sup>,  $\rho_{vz} = 1,2$  kgm<sup>-3</sup>,  $C = 0,48$  dostaneme  $v_{vlak} = 6,7$  ms<sup>-1</sup> = 24 km · h<sup>-1</sup>.

*Řešení 2. varianty:*

Abychom tento problém mohli vyřešit, musíme předpokládat, že povrchové síly jsou dostatečně silné (abychom mohli použít Newtonův vztah) a působí jen kolmo k rovině skla (aby neovlivňovaly trajektorii). Zejména druhý předpoklad splněn nebývá.

Na kapku na skle působí v rovině pohybu síla gravitační  $F_g = mg$  a síla odporu prostředí  $F_o = 1/2CS\rho_{vz}v_{vlak}^2$ . Jejich výslednice udává směr ve kterém se bude kapka pohybovat. Vzhledem k tomu, že kapka na skle má tvar přibližně polokoule bude  $S = \pi r^2/2$  a  $C = 0,48$ . Objem kapky spočítáme jako  $V = 2/3\pi r^3$ . Pro úhel  $\alpha$  platí  $\text{tg } \alpha = F_o/F_g$ . Dosazením získáme rychlost vlaku

$$v_{vlak} = \sqrt{\text{tg } \alpha \frac{8rg\rho_{kap}}{3C\rho_{vz}}}$$

Když dosadíme číselné hodnoty  $\alpha = 35^\circ$ ,  $r = 2,0$  mm,  $\rho_{kap} = 1000$  kgm<sup>-3</sup>,  $g = 9,8$  ms<sup>-2</sup>,  $\rho_{vz} = 1,2$  kg · m<sup>-3</sup>,  $C = 0,48$  dostaneme  $v_{vlak} = 8,0$  ms<sup>-1</sup> = 29 km · h<sup>-1</sup>.

Na závěr několik poznámek k reálnosti námi spočítaných hodnot:

Proudění vzduchu okolo vlaku bude zcela jistě nelaminární, což jsme neuvážili. Vzhledem k tomu, že neznáme přesný tvar kapky, je použití koeficientu  $C = 0,48$  diskutabilní (ve skutečnosti bude zřejmě o něco nižší). O tom, že mají kapky tvar více kulový než aerodynamický, se můžeme přesvědčit například v Malém průvodci meteorologií (Mladá fronta Praha 1989). K měření rychlosti vlaku se obě námi popsané metody nehodí také proto, že ve výsledných rovnicích vystupuje poloměr kapky, který by se ve vlaku asi měřil obtížně (bývá 1–3 mm). Ve druhé variantě se také projeví nepříznivě vliv povrchových sil.

**Úloha II.5 ... automobily**

Představte si, že po přímé silnici jedou dva automobily o hmotnosti  $m$  konstantní rychlostí  $v$ . Jeden z nich pak zrychlí na rychlost  $2v$  a jeho kinetická energie se tím zvětší o  $3mv^2/2$ . Při pohledu ze soustavy spojené s druhým autem zrychlí první z nulové rychlosti na rychlost  $v$ , čímž získá kinetickou energii  $mv^2/2$ . Vysvětlete, jak je to možné, když z hlediska obou soustav by se měla uvolnit stejná energie paliva.

**Řešení:**

Před započítím řešení si musíme uvědomit, že práce je veličina charakterizující míru změny energie, ale není to energie. Zejména tedy neplatí žádný zákon zachování práce a energie. Označme jako  $S1$  soustavu spojenou s vozovkou a jako  $S2$  soustavu spojenou s nezrychlujícím automobilem. Vypočteme práci, kterou vykonají síly motoru a síly třecí (pro jednoduchost předpokládejme rovnoměrně zrychlený pohyb). Síla třecí je ta, která uděluje automobilu zrychlení, což snadno ověříme myšlenkovým pokusem: Kdyby byl automobil zavěšen tak, aby se jeho kola nedotýkala vozovky, určitě by se nerozjel. Jaká je tedy práce třecích sil? Ta je určena vzorcem

$$W = Fs$$

kde  $F = ma = mv/t$  a  $s$  je dráha, po které působí. V soustavě  $S1$  je  $s_1 = 3vt/2$ , v soustavě  $S2$  je  $s_2 = vt/2$ . Každý snadno ověří, že změna kinetické energie je rovna práci, kterou vykonají třecí síly. Zrychlení tedy automobilu uděluje vozovka. Motor otáčí koly automobilu. Podrobnější úvahou lze zjistit, že práce vykonaná silami motoru, tedy i spotřeba paliva, je v obou soustavách stejná a je rovna síle  $F$  vynásobené obvodem kol a počtem otáček, které vykonají. Práce vykonaná motorem je rovna

$$W = \frac{mvR}{t} \frac{3vt}{2R} = \frac{3mv^2}{2}$$

Nyní ovšemže musíme najít odpověď na otázku, kam zmizel zbytek energie paliva v soustavě  $S2$ . Klíč k vyřešení této záhady tkví v pozorování, že soustava  $S1$  ani  $S2$  není inerciální, neboť v nich neplatí zákon zachování hybnosti. Tuto drobnou vadu odstraníme tím, že zvolíme (nyní již inerciální) soustavy  $S1'$  a  $S2'$ , které se na počátku uvažovaného děje pohybují nulovou rychlostí ( $S1'$ ) nebo rychlostí  $v$  ( $S2'$ ) vůči zemi. Jestliže jsme již připustili myšlenku, že se automobil odráží od země, musí se i země odrážet od automobilu a tedy zrychlovat. Označme hmotnost země (ve smyslu podložky)  $M$  a vypočítejme celkovou kinetickou energii automobilů a země v obou soustavách na začátku a na konci děje. K určení rychlosti země na konci děje použijeme zákon zachování hybnosti. V soustavě  $S1'$  na začátku děje je celková kinetická energie

$$E_{k,1,1} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mv^2 \quad (5)$$

Pokud má automobil zrychlit, musí za zákona zachování hybnosti předat stejně velkou, ale opačně orientovanou hybnost zemi. Tedy

$$v_z M = mv$$

a odtud  $v_z = \frac{m}{M}v$ . V soustavě  $S1'$  na konci děje je celková kinetická energie

$$E_{k,1,2} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m(2v)^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M}v\right)^2 = \frac{5}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}v^2$$

V soustavě  $S2'$  na začátku děje je celková kinetická energie

$$E_{k,2,1} = \frac{1}{2}Mv^2$$

V soustavě  $S2'$  na konci děje je celková kinetická energie

$$E_{k,2,2} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}M\left(v + \frac{m}{M}v\right)^2 = \frac{3}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}v^2$$

V obou případech je rozdíl celkové kinetické energie na začátku a na konci děje roven  $\frac{3}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(m^2/M)v^2$ , což je za předpokladu, že  $m$  je řádově menší než  $M$ , rovno vnitřní energii, kterou ztratilo palivo v motoru automobilu. Tímto je celý „problém“ úspěšně vyjasněn.

### Úloha III.1 ... jeřáb

Jeřáb může zdvihát břemeno pouze konstantní svislou silou  $F$ . Budeme jím zvedat ze země nekonečné lano o délkové hustotě  $\lambda$ . Jakou maximální rychlost jeho horní konec během pohybu dosáhne? Jakou maximální výšku dosáhne?

#### Řešení:

Úloha je zákeřná v tom, že na ni nelze použít druhý Newtonův zákon ve formulaci  $F = ma$ , platné pouze v případě, že hmotnost tělesa je konstantní. Je třeba vyjít ze vztahu

$$F = \frac{dp}{dt},$$

tj. síla je rovná změně hybnosti za jednotku času. Další nemilé překvapení je, že zákon zachování mechanické energie je přímým důsledkem vztahu  $F = ma$ .

Poznámka: Kdekoliv v dalším textu narazíte na symbol  $dx$  a nebudete mu rozumět, představte si místo něj  $\Delta x$ . Podobně z  $f$  učiňte  $\Sigma$ .

Pokud se těleso neměnné hmotnosti pohybuje za působení konzervativního<sup>6</sup> silového pole (gravitační síly a síly jeřábu), uvolněná potenciální energie a práce konaná jeřábem se zcela přemění na energii kinetickou. Pokud ovšem během pohybu hmotnost tělesa vzroste o  $\Delta m$ , musí se z potenciální energie uhradit i urychlení přírůstku  $\Delta m$  na rychlost celého tělesa. Část energie se tedy zdánlivě „ztrácí“. Pomocí úvah v tomto směru dospěl *Milan Kocián* k dílčím výsledkům, a to bez použití derivací.

Předvedeme nyní řešení úlohy přímo z pohybových rovnic. Označíme  $z$  výšku konce lana a  $\lambda$  délkovou hustotu lana. Z druhého Newtonova zákona dostaneme

$$F - \lambda z g = \frac{dp}{dt} \quad (6)$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \lambda z \frac{dz}{dt} \right), \quad (7)$$

neboť  $\lambda z = m$ ,  $dz/dt = v$  a  $p = mv$ . Dosazením (6) do (7) dostaneme

$$F - \lambda z g = \frac{d}{dt} \left( \lambda z \frac{dz}{dt} \right) \quad (8)$$

Vynásobením  $z dz$  obdržíme

$$Fz dz - \lambda g z^2 dz = z dz \frac{d}{dt} \left( \lambda z \frac{dz}{dt} \right) \quad (9)$$

Zintegrujeme-li (9) podle  $t$ , získáme

$$\int (Fz - \lambda g z^2) dz = \lambda \int z \frac{dz}{dt} d \left( z \frac{dz}{dt} \right) \quad (10)$$

<sup>6</sup>Konzervativní je pole, ve kterém lze definovat potenciální energii. Problémy nastávají například s magnetickým polem nebo při započítání tření.

Provedeme-li substituci  $z \, dz/dt = q$ , dostane pravá strana (10) tvar  $\lambda \int q \, dq$ , což po integraci dá  $\frac{1}{2}\lambda q^2 + \text{const.}$  Po dosazení za  $q$  a zintegrování levé strany obdržíme

$$\frac{1}{2} \frac{F}{\lambda} z^2 - \frac{1}{3} g z^3 = \frac{1}{2} \left( z \frac{dz}{dt} \right)^2 + C, \quad (11)$$

kde  $C$  je integrační konstanta, kterou určíme z počátečních podmínek úlohy. Pro speciální případ  $z = 0$  se rovnice (11) zjednoduší na  $C = 0$ , rovnice však musí platit pro libovolné  $z$ , tedy musí být  $C = 0$ .

Vykrátíme-li  $z^2$ , dostaneme

$$\frac{1}{2} \frac{F}{\lambda} - \frac{1}{3} g z = \frac{1}{2} v^2 \quad (12)$$

Po úpravě

$$v = \frac{dz}{dt} = \sqrt{\frac{F}{\lambda} - \frac{2gz}{3}} \quad (13)$$

Nyní pro zajímavost uveďme, jak by se získala závislost  $z$  na  $t$ :

$$\frac{dz}{\sqrt{F/\lambda - 2gz/3}} = dt \quad (14)$$

Zintegrováním obou stran rovnice

$$-\frac{3}{g} \sqrt{\frac{F}{\lambda} - \frac{2gz}{3}} = t - t_0$$

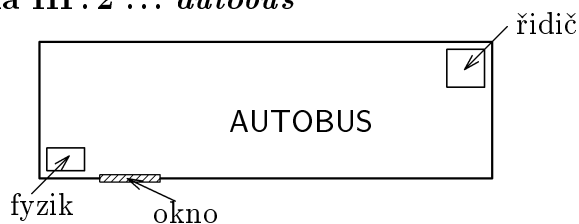
$$z = z(t) = \frac{3F}{2\lambda g} - \frac{g}{6} (t - t_0)^2.$$

Nyní máme tedy vyjádřenu rychlost na poloze a dokonce i polohu na čase ( $t_0$  čas, kdy konec lana dosáhne maximální výšky). Pro odpověď na zadané otázky stačí jen první závislost:

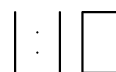
Z rovnice (12) je zřejmé, že maximální rychlosti dosáhne konec lana zřejmě při  $z = 0$ , pak bude  $v_{\max} = \sqrt{F/\lambda}$  a maximální výšky dosáhneme pro  $v = 0$ , což nastane při  $z = 3F/(2\lambda g)$ . To je vidět i ze závislosti  $z(t)$ : shledáváme, že konec lana se pohybuje *rovnoměrně zpomaleně* se zrychlením  $a = g/3$  (srovnej s  $s = gt^2/2$ ).

Ze závislosti  $z(t)$  vyplývá, že po určitém čase zase lano (přes veškerou snahu jeřábu) zase spadne na zem<sup>7</sup>! Kupodivu to není chyba; pokud bychom do úlohy (tj. do pohybové rovnice) zavedli tlumení (například brzdou sílu úměrnou rychlosti), z (neharmonického) periodického kmitání by se staly tlumené kmity blížící se k rovnovážné poloze  $z = F/(\lambda g)$ . Řešení takové rovnice už je ovšem nanejvýš vhodné ponechat počítači.

### Úloha III.2 ... autobus



Obr. 25



Obr. 26



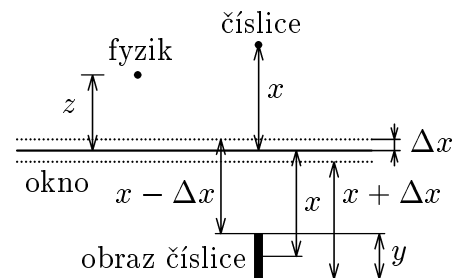
Obr. 27

<sup>7</sup>A celý děj se může opakovat.

Při cestě autobusem se vám může přihodit následující podivná věc: Sedíte na zadním sedadle vpravo a díváte se z okna (viz obr. 25). Jelikož je noc, vidíte v něm také odraz digitálních hodin visících nad řidičem. Jede-li autobus pěkně po rovině, mají číslice odražené v okně zanedbatelnou tloušťku (viz obr. 26). Může se ale stát, že vlivem nerovností na vozovce a klepání motoru se okno rozkmitá a číslice se rozmažou tak, že vypadají 1 cm tlusté (viz. obr. 27). S jak velkou amplitudou okno kmitá? Jaká musí být minimální frekvence, abychom neviděli jednotlivé kmity číslic?

### Řešení:

Okno autobusu lze považovat za rovinné zrcadlo. Rovinné zrcadlo vytváří obraz předmětu v určité vzdálenosti před zrcadlem, ve stejné vzdálenosti za zrcadlem. Označme  $x$  vzdálenost číslice od středu rovnovážné polohy okna,  $\Delta x$  amplitudu jeho kmitů. Nechtě dále náš fyzikální přítel je ve vzdálenosti  $z$  od rovnovážné polohy okna. Potom obraz číslice, viz obrázek 28, bude v krajních polohách ve vzdálenostech  $z - 2\Delta x + x$  a  $z + 2\Delta x + x$  od fyzika. Je-li tloušťka čáry  $y$ , potom  $\Delta x = y/4 = 0,25$  cm.



Obr.28

Mnohem obtížnější je určení minimální frekvence kmitů okna. Lidské oko je schopno rozlišit dva světelné signály vzdálené od sebe alespoň 100 ms. Takový signál však na něj působí dojemm blikání a je mu i trochu nepříjemný. Světelné signály s frekvencí 20 Hz (perioda 50 ms) a výše budí dojem stálého zdroje světla. Je-li  $T$  perioda kmitů okna, potom *průměrná* doba mezi dvěma průchody obrazu číslic toutéž polohou, je  $T/2$ . Je potřeba si však uvědomit, že mezi jednotlivými průchody mohou být i řádově různé časové intervaly. Lze očekávat, že *průměrná* doba mezi dvěma průchody obrazu číslic toutéž polohou bude menší než 50 ms, ale ne příliš. Odtud lze odhadnout mezní frekvenci kmitů okna na asi 15 Hz. Je však potřeba dodat, že tato hodnota bude u každého člověka jiná.

### Úloha III.3 ... káva a mléko

Představte si, že jste zaspali a spěcháte. Uvaříte si kávu a máte 2 minuty na to, abyste ji vypili. Káva je horká a vy potřebujete během zmíněných 2 minut dosáhnout co nejnižší teploty. Kávu pijete samozřejmě s mlékem. Na vás je, abyste rozhodli, dosáhnete-li nižší teploty, když necháte kávu 2 minuty chladnout, pak do ní nalijete mléko, a nebo mléko nalijete co nejdříve? Nebo je výhodnější nalít mléko někdy v průběhu chladnutí? Mléko má samozřejmě pokojovou teplotu.

*Poznámka:* Předpokládejte, že předané teplo je přímo úměrné rozdílu teplot tělesa a okolí, teplota tělesa se tedy bude exponenciálně přibližovat teplotě okolí.

### Řešení:

Jak si co nejrychleji ochladit kávu nebo čaj mlékem, to je otázka, která trápí mnohé z vás i z nás. Je lepší nalít nejprve mléko a potom nechat chladit, nebo nechat kávu stydnout a mléko nalít těsně před konzumací?

Jak již bylo naznačeno v zadání, pokud v místnosti udržíme konstantní teplotu, pak se teplota kávy bude exponenciálně přibližovat k teplotě místnosti. Odvození není složité. Za krátký čas  $\Delta t$  káva odevzdá okolí teplo

$$\Delta Q = -k S_k (T - T_0) \Delta t,$$

kde  $T_0$  jsme označili teplotu okolí,  $T$  je okamžitá teplota kávy,  $S$  je plocha, kterou se káva dotýká okolí a  $k$  je konstanta, která charakterizuje střední rychlost přestupu tepla z kávy do



okolí. Změnu teploty kávy pak popisuje rovnice

$$\Delta Q = C_k \Delta T,$$

kde  $C_k$  je tepelná kapacita kávy. Spojíme-li obě rovnice dohromady, dostaneme

$$\frac{\Delta T}{T - T_0} = -\frac{k S_k}{c_k} \Delta t.$$

Z této rovnice dostaneme průběh teploty v čase — buď integrováním, nebo intuitivně (víme, že to bude nějaká exponenciální závislost). Označme  $\alpha_k = k S_k / C_k$  a pak nejsložitější exponenciální závislost může mít tvar

$$T = T_0 + (T_1 - T_0)e^{-\alpha_k t}. \quad (15)$$

Po dostatečně dlouhé době zbyde z exponenciály nula ( $e^{-\infty} \rightarrow 0$ ) a proto musí být první člen v součtu  $T_0$  — pokojová teplota. Na začátku je exponenciála rovna jedné ( $e^0 = 1$ ) a teplota tedy musí být rovna teplotě  $T_1$ . Proto dostaneme jako faktor před exponenciálou výraz  $T_1 - T_0$ .

Teď víme, jak káva chladne, když ji necháme stát. Co se stane, jestliže do ní nalijeme mléko? Pro tuto situaci můžeme napsat kalorimetrickou rovnici

$$C_k(T_k - T_{k+m}) = C_m(T_{k+m} - T_0),$$

kde  $T_k$  je teplota kávy před smícháním,  $T_{k+m}$  teplota směsi po smíchání. Malou ekvilibristikou se vzorci dostaneme

$$T_{k+m} = T_0 + \frac{C_k}{C_k + C_m}(T_k - T_0). \quad (16)$$

Nyní můžeme spočítat výslednou teplotu v případě, že mléko nalejeme do kávy v libovolném čase  $t$ . Nejprve káva stydne podle vztahu (15), získanou teplotu dosadíme do vztahu (16) za  $T_k$  a máme teplotu, kterou bude mít směs káva-mléko po smíchání:

$$T_{k+m} = T_0 + (T_{\text{poč}} - T_0) \frac{C_k}{C_k + C_m} e^{-\alpha_k t}.$$

V tuto chvíli nám ale ještě zbývá 2 min –  $t$  času do odchodu z domova. Pitivo nám bude stydnout podle vztahu podobného (15), kde za čas stydnutí dosadíme zbývajícím čas, tedy 2 min –  $t$ . Ale to není vše, ještě musíme konstantu  $\alpha_k$  vyměnit za konstantu  $\alpha_{k+m}$ . Proč? Protože se změnila celková tepelná kapacita ochlazované kapaliny a také plocha kontaktu s okolím se zvětšila (každá samozřejmě jinak). Faktor v exponenciále můžeme napsat jako

$$\alpha_{k+m} = \frac{k S_{k+m}}{C_k + C_m}.$$

Dáme-li vše dohromady, dostaneme, že teplota kávy a mléka po dvou minutách chladnutí bude

$$T_{\text{konc}} = T_0 + (T_{\text{poč}} - T_0) \frac{C_k}{C_k + C_m} e^{-\alpha_k t} e^{-\alpha_{k+m}(2-t)},$$

v závislosti na čase  $t$ , kdy jsme přilili mléko. Pokud budou oba koeficienty  $\alpha_k$  a  $\alpha_{k+m}$  shodné, můžeme argumenty v exponenciálách sečíst a dostaneme jedinou exponenciálu  $e^{-\alpha \cdot 2t}$  a tudíž výsledná teplota nebude záviset na okamžiku, kdy jsme mléko do kávy nalili.

Ale koeficienty nejsou stejné a proto bude záviset na čase nalití mléka. Exponenciálu ještě jednoduše upravíme na

$$e^{-2\alpha} e^{-(\alpha_k - \alpha_{k+m})t}.$$

Závisí na rozdílu  $\alpha_k - \alpha_{k+m}$ , jestli to je klesající, nebo rostoucí funkce. To se dozvíme, zamyslíme-li se nad tím, jak se  $\alpha_k$  liší od  $\alpha_{k+m}$ . Záměrně jsem do definičního vztahu pro  $\alpha_{k+m}$  nenapsal nový povrch jako součet, protože povrch se změní jen málo, kdežto tepelná kapacita vzroste pozorovatelně. To znamená, že  $\alpha_{k+m} < \alpha_k$  a tudíž je výhodnější nalít mléko co nejpozději.

Na závěr ještě jednu poznámku: V praxi je proces chladnutí silně ovlivněn tím, jak vše zamícháme. A vzhledem k tomu, že se konstanty  $\alpha_k$  a  $\alpha_{k+m}$  od sebe liší jen velmi málo, převládnu spíše tyto jevy.

Jedním z neúčinnějších procesů, při kterém něco chladne je vypařování. A rychlost vypařování je silně závislá na tlaku par vypařované kapaliny nad hladinou. Pokud tento tlak účinně snižujeme, např. odváděním par od hladiny (třebas foukáním), kapalina se odpařuje intenzivněji a protože výparné teplo se kapalině musí odebrat, tak se i ochlazuje.

### Úloha III.4 ... válec versus kvádr

Mějme homogenní válec a homogenní kvádr. Obě tělesa jsou vyrobená ze stejného materiálu a mají stejnou hmotnost. Hodíme je současně vedle sebe na stůl stejnou počáteční rychlostí  $v_0$  (hodíme je rovnoběžně s rovinou stolu, svislá složka rychlosti při dopadu je nulová).

Válec se na počátku neotáčí. Rozhodněte, které těleso se bude pohybovat rychleji, případně diskutujte fáze pohybu, kdyby se jejich vzájemná pozice s časem měnila. Uvažujte pohled jak silový, tak energetický.

Uvažujte, že smyková třecí síla je charakterizovaná pouze koeficientem smykového tření, tj. základní model, kdy smyková třecí síla závisí **pouze** na normálové přitlačné síle. Valivé tření neuvažujte.

#### Řešení:

*Silový pohled:* Silové řešení této úlohy je zřejmé a jak se dalo předpokládat, nečinilo větší problémy.

Kvádr i válec po dopadu na stůl se začnou o stůl třít. Třecí síla, jak bylo uvedeno v zadání, je závislá pouze na hmotnosti předmětů (je rovna  $mgf$ ) a je tedy pro oba předměty stejná. Je to také jedinná síla (tíha je plně kompenzována normálovou reakcí stolu), která na předměty působí, a tak obě tělesa budou zpomalovat se stejným zrychlením  $-gf$ . (Pokud se vám to zdá zvláštní, uvědomte si, že platí 1. impulzová věta pro pevné těleso, která říká, že těžiště tělesa se bude pohybovat, jako bychom v něm soustředili celkovou hmotnost tělesa a nechali v něm působit všechny síly na těleso působící, bez ohledu na to, kde tyto síly vlastně na těleso původně působí, matematicky

$$\vec{a}_T = \frac{1}{M} \sum_i \vec{F}_i, \quad (17)$$

$M$  je hmotnost tělesa,  $\vec{F}_i$  jednotlivé působící síly).

Kvádr se bude pohybovat rovnoměrně zpomalově s okamžitou rychlostí  $v = v_0 - gft$ , kde  $t$  je čas počítaný od dopadu předmětů na stůl,  $v_0$  počáteční rychlost, a nakonec se zastaví — v čase  $T_z = v_0/gf$ . Kvádr se zřejmě tře o stůl po celou dobu svého pohybu — jinak se totiž, na rozdíl od válce, pohybovat nemůže.

Válec po dopadu také začne třít o stůl. Na rozdíl od kvádrů se však začne roztáčet a po jisté době  $T_k$  se už bude točit tak rychle, že třecí síla zanikne — v tom okamžiku bude  $\omega r = v$ , kde  $\omega$  je jeho úhlová rychlost a  $v$  je translační rychlost jeho pohybu. Od tohoto okamžiku válec neprokluzuje, a protože na něj už žádná síla nepůsobí, bude se dále pohybovat konstantní rychlostí.

Shrneme-li dosavadní myšlenky, vidíme, že do času  $T_k$  se obě tělesa pohybují stejnou rychlostí, po  $T_k$  si válec zachovává konstantní rychlost, kvádr dále zpomaluje až do zastavení.

Určeme ještě blíže  $T_k$ . Rozmyslíme-li si, co říkají 1. a 2. impulzová věta, můžeme psát (uvažujeme moment setrvačnosti válce  $1/2mR^2$ ):

$$\begin{aligned} v &= v_0 - gft & (1. \text{ impulzová věta}) \\ mgfR &= \frac{1}{2}mR^2 \frac{d\omega}{dt} & (2. \text{ impulzová věta}) \end{aligned}$$

tedy

$$\omega = \frac{2gft}{R}, \quad \text{jelikož } \omega_{t=0} = 0.$$

Z podmínky  $\omega R = v$  potom vychází  $T_K = v_0/3gf$ . Snadno ještě můžeme určit konečnou rychlost válce (dosazením  $T_k$  do rovnice pro rovnoměrně zpomalený pohyb). Vyjde  $v_k = 2/3v_0$ .

*Energetický pohled:* Energetický pohled na pohyb kvádrů je jednoduchý. Na začátku má kvádr kinetickou energii  $1/2mv_0^2$ . V průběhu pohybu pak  $1/2mv^2$ . Rozdíl těchto energií je zcela přeměněn na teplo o velikosti  $F_t s = mgfs$ , kde  $s$  je uražená dráha.

U válce je situace poněkud komplikovanější. Nabízíme vám tento vcelku přirozený pohled: Na počátku je kinetická energie válce  $1/2mv_0^2$ . V průběhu pohybu pak  $1/2mv^2 + 1/2I\omega^2$ , kde oproti kvádrů přibyl člen pro rotační kinetickou energii válce. Měla by platit bilance:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + E_{od},$$

přičemž  $E_{od}$  je energie odebraná válci, která však nebyla přeměněna na jinou mechanickou energii a tudíž se vlastně jedná o teplo, které v průběhu tření vzniká a nakonec uniká do okolí. Zde je potřeba si uvědomit, jak  $E_{od}$  spočítat. Vraťme se proto na moment ke kvádrů. Tam se teplo rovnalo třecí síle krát dráha, po které *kvádr třel o stůl*. Není důvodu se domnívat, že jinak by tomu mělo být u válce. Musíme si ale všimnout, že tato „třecí“ dráha není shodná s drahou, kterou válec skutečně urazí. Válec totiž dokáže urazit dráhu i bez toho, aby se povrchy o sebe třely — může se otáčet. Pohyb válce v našem příkladě si tak můžeme představit jako složení čistě otáčivého pohybu (otáčení představuje translační rychlost  $\omega R$ ) a „třecího“ translačního pohybu (zbytek do plné okamžité rychlosti  $v$ ). Z toho už snadno usoudíme, že „třecí“ dráha bude

$$s_t = \int_0^t (v - \omega R) dt.$$

Vytvořené teplo pak je

$$\begin{aligned} E_{od} &= F_t \left( \int_0^t v dt - \int_0^t \omega R dt \right) = F_t s - \int_0^t F_t R \omega dt \\ E_{od} &= F_t s - \int_0^\phi F_t R d\varphi, \end{aligned}$$

kde  $\phi$  je celkový úhel, o který se válec do času  $t$  otočí. Podíváme-li se nyní na integrál na pravé straně, určitě si všimneme, že se vlastně jedná o práci, kterou bylo potřeba vykonat právě na roztočení válce, tedy integrál je roven  $1/2I\omega^2$  ( $Rd\varphi$  představuje elementární dráhu, po které působí síla  $F_t$ ). Dosazením do energetické bilance tak dostáváme rovnici:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + F_t s.$$

Pomocí této rovnice už další rozbor uděláme snadno (všimněte si, že tato rovnice je totožná s energetickou rovnicí pro kvádr).

Poslední rovnice se dá odvodit i jinak, přes integraci pohybové rovnice pro těžiště (tečkou nad písmenem značíme derivaci podle času):

$$\begin{aligned} ma_T &= m\dot{v}_T = F_t \\ mv_T\dot{v}_T &= F_tv_T \\ \int_0^t mv_T\dot{v}_T dt &= \int_0^t F_tv_T dt \\ - \int_{v_0}^v mv_T dv_T &= \int_0^s F_t ds \\ \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}mv^2 + F_ts. \end{aligned}$$

Toto odvození nám ale mnoho neříká o tom, co se ve skutečnosti v systému děje. Proto preferujeme výše uvedený postup. Nicméně stojí za to si uvědomit, že rovnice, kterou jsme takto odvodili, platí pro jakýkoli zpomalený pohyb (posune-li se těleso za působení konstantní odporové síly  $F$  podél dráhy  $s$ , platí  $1/2mv_0^2 - 1/2mv^2 = Fs$ , bez obledu na to, zda se těleso silou ještě i roztáčí či ne.)

### Úloha III.5 ... záplavy ve vesmíru

Uvažujme vesmír se stejnými fyzikálními zákony, který je však vyplněn z větší části kapalnou vodou. Ve vodě se vyskytují drobné bublinky plynu, jejichž hustota je značně menší, než je hustota vody. Budou se tyto bublinky vzájemně přibližovat nebo vzdalovat?

#### Řešení:

Mějme vodu v celém prostoru, aby ve stavu bez bublin nepůsobily žádné síly. Pokud ještě omezíme své pozorování pouze na dvě bubliny, oprostíme náš problém zcela od jevů, které nechceme bezprostředně zkoumat.

Když do libovolného místa vložíme jednu bublinu, vytvoří okolo sebe gravitační pole, jehož siločáry budou z bubliny vycházet, resp. intenzita gravitačního pole směřuje od bublinky (miniaturní tělíčko bude od bublinky odpuzováno). To ukážeme jednoduše tak, že se pokusíme sečíst všechny gravitační síly, které působí na tělíčko. Pokud budeme sčítat elementární síly, které na tělíčko působí, vždy můžeme tyto síly spárovat tak, že se při vektorovém sčítání vždy dvě opačně orientované ve výsledném součtu navzájem vyruší. Jediná síla, která k sobě nemá opačný ekvivalent je v tom směru, kde leží naše bublinka. Na straně naší bublinky není hmota, kdežto na protější straně je hmota vody. Tj. síla na tělíčko bude působit směrem od bubliny.

Co se děje s normální bublinkou, pokud ji umístíme do libovolného gravitačního pole? Začne se pohybovat proti směru intenzity gravitačního pole a to díky Archimédovu zákonu.

Stejně tak se bude chovat druhá bublinka, kterou vložíme do zatopeného vesmíru. A vzhledem k tomu, že první bublinka vytváří pole s intenzitou směrem od sebe, bude se druhá bublinka pohybovat proti této intenzitě, tedy k první bublině. To tedy znamená, že se bublinky budou přitahovat.

### Úloha IV.1 ... soutěž jehlanů

Vezmeme dva jehlany stejných rozměrů se čtvercovou podstavou o délce podstavné hrany  $a$  a výšce  $v$ . Kromě toho, že jejich rozměry jsou stejné, i jejich hmotnost je stejná. Jeden má drátěné hrany a druhý má plechové stěny. Postavíme je vedle sebe na podložku, kterou začneme naklánět. Který z modelů se dříve překloupí? Tření je tak velké, že jehlany po podložce nebudou klouzat.

**Řešení:**

Pokud budeme podložku naklánět, nejdříve se překlopí ten jehlan, který má těžiště výše. Protože jehlan je symetrický podle výšky, stačí vypočítat výšku těžiště nad podstavou. Nejdříve spočítáme výšku těžiště podstavy a pláště. Podstava má těžiště ve výšce  $v_p = 0$ . Plášť drátového modelu má těžiště v polovině výšky a plášť plechového modelu má těžiště v  $\frac{1}{3}$  výšky, protože je složen z trojúhelníků.

Nyní musíme vypočítat hmotnost pláště a podstavy. Hmotnost modelu necht' je  $m$ . Potom hmotnost podstavy drátového modelu je (podle poměru délek drátu z nichž je složena podstava a celkové délky drátu)  $m_{dp} = m4a/(4l + 4a)$ , kde  $l$  je délka hrany pláště a  $a$  délka hrany podstavy. Hmotnost pláště je obdobně  $m_{dpl} = m4l/(4l + 4a)$ .

U plechového modelu vypočteme jednotlivé hmotnosti podle poměru jednotlivých ploch:

$$m_{pp} = m \frac{a}{a + 2h},$$

$$m_{ppl} = m \frac{2h}{a + 2h},$$

kde  $h$  je výška stěny jehlanu.

Dále platí:

$$l = \sqrt{\frac{a^2}{2} + v^2},$$

$$h = \sqrt{\frac{a^2}{4} + v^2},$$

kde  $v$  je výška jehlanu.

Známe tedy hmotnosti i výšky těžišť jednotlivých částí. Celková výška těžiště dvou částí se spočítá jako  $(m_1y_1 + m_2y_2)/m$ , kde  $y$  je výška těžiště nad podstavou. Po dosazení jsou výšky těžišť drátového a plechového modelu

$$y_d = \frac{v}{2} \frac{\sqrt{\frac{a^2}{2} + v^2}}{a + \sqrt{\frac{a^2}{2} + v^2}} \quad (18)$$

$$y_p = \frac{v}{3} \frac{\sqrt{\frac{a^2}{4} + v^2}}{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + v^2}} \quad (19)$$

Nyní stačí porovnat tyto dva výrazy. Přímo se to nepodaří, neboť vznikne rovnice příliš vysokého řádu, než abychom byli schopni ji vyřešit. Proto použijeme fintu. Předpokládáme, že výraz (18) je větší než (19). Pokud zvětšíme výraz (19) na

$$y_p = \frac{v}{3} \frac{\sqrt{\frac{a^2}{2} + v^2}}{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{2} + v^2}} \quad (20)$$

a dokážeme, že (20) je stále menší než (18), pak jsme zároveň dokázali, že (18) je větší než (19). Porovnat výrazy (18) a (20) už není problém, pokud využijeme toho, že veškeré proměnné mohou nabývat pouze kladných hodnot. Těžiště má tedy výše jehlan drátový, proto se překlopí dříve.

Někteří řešitelé zapomněli, že rozhodující je výška těžiště a porovnávali pouze vedlejší vlivy, jako je přilnavost k podložce nebo působení částic podložky na podstavu jehlanu. Tyto vlivy by se uplatnily pouze tehdy, kdyby těžiště obou modelů byla stejně vysoko, ovšem v tomto případě mají zanedbatelný význam.

**Úloha IV . 2 ... vodní hodiny**

Vodní hodiny jsou přesýpací hodiny, ve kterých se místo přesypávání písku přelévá voda. Navrhněte jejich tvar tak, aby hladina vody v horní nádobce klesala konstantní rychlostí. Vzduch je z nádobek vyčerpán.

**Řešení:**

Zadání úlohy lze splnit mnoha způsoby, uvedeme ten, který byl ve vašich řešeních nejčastější.

Označme obsah průřezu v nejužším místě  $S_0$ , plochu hladiny ve výšce  $h$  označme  $S$ . Rovnice kontinuity zní:

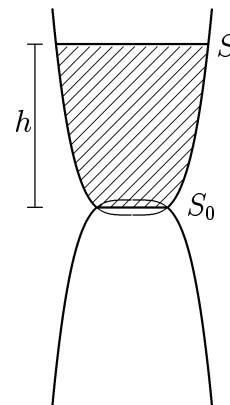
$$S_0 v_0 = S v \quad (21)$$

kde  $v_0$  je rychlost výtoku vody v nejužším místě a  $v$  je rychlost poklesu hladiny (ta má být konstantní). Pro vyjádření závislosti výtokové rychlosti na výšce  $h$  využijeme Bernoulliho rovnici:

$$h\rho g + \frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2}\rho v_0^2 \quad (22)$$

Po vykrácení hustoty  $\rho$  dosadíme za  $v_0$  z rovnice kontinuity:

$$h = \frac{v^2}{2g} \left( \frac{S^2}{S_0^2} - 1 \right)$$



Obr.29 (23)

Budeme dále předpokládat, že nádobky hodin mají rotačně symetrický tvar (jako většina přesýpaček), tedy  $S = \pi r^2$ , kde  $r$  je poloměr nádobky ve výšce  $h$ . Dosazením do předchozí rovnice dostaneme:

$$h = \frac{\pi^2 v^2}{2g S_0^2} r^4 - \frac{v^2}{2g} \quad (24)$$

Z této rovnice je vidět, že nádobka hodin bude mít tvar, který vznikne rotací křivky čtvrtého stupně okolo osy  $y$  (viz obr. 29).

V úloze je možné provést v Bernoulliho rovnici zanedbání členu  $\rho v^2/2$  (v případě  $v \ll v_0$ ), pak je  $v_0 = \sqrt{2gh}$  a

$$h = \pi^2 v^2 r^4 / 2g S_0^2.$$

Tento výsledek přestává fungovat v případě, že v horní nádobce již nezůstává mnoho vody.

Při výpočtu jsme zanedbali jevy spojené s kapilaritou a viskozitou. Řešení úlohy by se tím poněkud zkomplikovalo.

**Úloha IV . 3 ... energeticky úsporný domeček**

Stavební firma Krychle staví domy pouze krychlovitého tvaru. Její nejnovější stavba má hranu dlouhou 100 m. Jak je možné, že oproti jejich první stavbě (s hranou dlouhou 10 m) klesly značně náklady na vytápění jednoho bytu? Kolikrát? Byty se staví stále stejně velké a firma používá stále stejné suroviny.

**Řešení:**

Základní a jedinou fyzikální úvahou této úlohy bylo uvědomit si, že unikající teplo bude úměrné povrchu domu. Je to pochopitelné (kudy by teplo unikalo, když ne stěnami) a říká nám to známý vztah

$$P = \lambda \frac{S}{d} \Delta T,$$

kde  $\lambda$  je koeficient úměrnosti,  $S$  obsah stěn,  $d$  jejich tloušťka a  $\Delta T$  je rozdíl teplot na vnější a vnitřní straně stěny.  $P$  je tepelný výkon domku, tedy teplo, které stavba vyzáří za jednotku

času. Počet bytů bude úměrný objemu domu, z čehož je zřejmé, že pro posouzení výhodnosti stavby z hlediska nákladů na vytápění jednoho bytu nás zajímá podíl povrchu domu ku jeho objemu. Objem domu roste se třetí mocninou jeho rozměrů, zatímco povrch roste jen s druhou mocninou rozměrů. Poměr bude u krychle s desetkrát větší hranou desetkrát menší ( $10^3/10^2 = 10^1$ ), tudíž náklady na vytápění jednoho bytu klesnou také desetkrát.

Toto stačilo k úspěšnému vyřešení úlohy. Snad se ještě dalo uvažovat, že různými stěnami odchází různé procento tepla. Nicméně, jsou-li domy až na rozměry zcela identické, náklady na topení klesnou stejně.

#### Úloha IV.4 ... vážení na rovníku

Kdy ukáží pružinové váhy na rovníku větší hmotnost tělesa: v poledne nebo o půlnoci? O kolik procent se budou údaje lišit? Potřebné hodnoty vyhledejte ve fyzikálních tabulkách. Uvažujte pouze soustavu Země — Slunce (Měsíc někam odletěl).

#### Řešení:

Zkusme si nejprve rozmyslet, jaké síly působí na těleso v soustavě spojené se Zemí. Určitě na něj působí gravitační síla Země a Slunce. Dále nás jistě nepřekvapí, že na něj působí i odstředivá síla spojená s rotací Země kolem své osy, ale působí na něj i „odstředivá“ síla spojená s rotací Země kolem Slunce.

Vzhledem k tomu, že gravitační síla Země a odstředivá síla spojená s rotací Země kolem osy mají stejný (ve smyslu dolů) směr a velikost v poledne i o půlnoci, neovlivní rozdíl hmotností, který zjistíme při vážení v poledne a o půlnoci. Gravitační síla Slunce a „odstředivá“ síla, způsobená rotací Země kolem Slunce, mají v poledne a o půlnoci opačný směr, a vzhledem k tomu, že poloměr Země je značně menší než vzdálenost Země od Slunce, i (přibližně) stejnou velikost. Tedy jejich působení na vážené těleso je nulové a hmotnost zjištěná v poledne je stejná jako o půlnoci. To, co zde nazýváme „odstředivou“ silou od Slunce, není odstředivá síla, jak je obvykle pojímána; jedná se totiž o sílu způsobenou zrychlením počátku soustavy, tedy zrychlením středu Země, která rotuje kolem Slunce. Hlavním důsledkem tohoto faktu potom je, že velikost „odstředivé“ síly od Slunce, je ve všech místech soustavy spojené se Zemí stejná.

Vyšetřeme však přesněji rozdíl gravitační a „odstředivé“ síly od Slunce. Označme poloměr Země  $R_Z$ , vzdálenost středu Země od Slunce  $R_S$ . Rotovala-li by Země kolem Slunce po kružnici úhlovou rychlostí  $\omega$ , platilo by pro „odstředivou“ sílu od Slunce (přibližně):

$$F_{od} = m\omega^2 = m\kappa \frac{M_S}{R_S^2}$$

Tedy v poledne by rozdíl gravitační a odstředivé síly nadlehčoval těleso silou:

$$F_1 = \kappa \frac{mM_S}{(R_S - R_Z)^2} - \kappa \frac{mM_S}{R_S^2} = \kappa m M_S \frac{2R_S R_Z - 3R_Z^2}{R_S^4}$$

Podobně se vypočte síla, která o půlnoci těleso nadlehčuje:

$$F_2 = \kappa m M_S \frac{2R_S R_Z + 3R_Z^2}{R_S^4}$$

Celkový relativní rozdíl naměřené hmotnosti bude:

$$P = \frac{\kappa m M_S}{mg} \left( \frac{2R_S R_Z + 3R_Z^2}{R_S^4} - \frac{2R_S R_Z - 3R_Z^2}{R_S^4} \right) = \frac{6\kappa M_S}{g} \frac{R_Z^2}{R_S^4} \approx 10^{-11}$$

Tedy náš závěr v prvním odstavci, že obě hmotnosti se prakticky neliší je správný. (To odpovídá tomu, že jsem zanedbali Měsíc, který způsobuje principiálně stejné efekty, ale zato několikrát silnější — např. příliv.)

**Úloha IV.5 ... levitující kapalina**

Jistě jste si už někdy všimli, že když vytahujeme skleničku z umyvadla dnem vzhůru, zůstává v ní voda až do té chvíle, kdy její okraj vytáhneme nad hladinu. Pak všechna vyteče. Vysvětlíte proč. Uvědomte si, že na povrch kapaliny ve skleničce obrácené dnem vzhůru působí tlak vzduchu, který dokáže vytlačit až 10 m vodního sloupce!

**Řešení:**

Jako vzorové řešení zde zveřejňujeme řešení Michaely Šípalové. Toto řešení se nám zdálo rozumné, v rámci možností stručné, vyčerpávající:

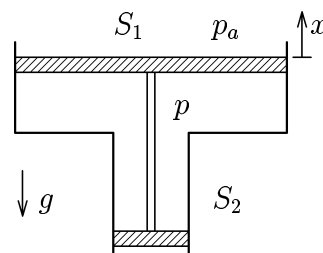
Situace, při které by ve skleničce zůstala voda i po jejím vytažení z vody, je sice teoreticky myslitelná, právě proto, že tlak vzduchu dokáže vytlačit až deset metrů vodního sloupce, ale prakticky nemožná. Voda v obrácené skleničce je v situaci sice rovnovážné, ale ne stabilní. Stačí tedy nepatrné vychýlení z této polohy, aby byla rovnováha porušena. Po vytažení skleničky s vodou z vody se vytvoří na kapalině povrchová vrstva, která se chová jako pružná blanka. Tato blanka činí situaci vlastně stabilní. Ovšem meze této stability překročíme v tomto případě nepatrnou vnější poruchou, závanem vánku nebo zachvěním ruky.

Jiná situace však nastává např. u pipety, kde využíváme toho, že síly povrchového napětí kapalinu udrží, protože průměr otvoru je dostatečně malý. K porušení této stability u pipety je třeba alespoň pořádné zatřepání.

*Poznámka:* Porušení stability povrchové vrstvy je možné hledat již v okamžiku jejího vzniku — při „odtrhávání“ skleničky od ostatní vody.

**Úloha V.1 ... dvojpíst**

Na obrázku 30 vidíte dva spojené písty o ploše  $S_1$  a  $S_2$  a celkové hmotnosti  $m$  zasunuté do pouzdra, které je na obou stranách otevřené. Celé zařízení je v rovnováze a je umístěno v tíhovém poli  $g$ . Vně pístů je atmosférický tlak  $p_a$ , uvnitř je 1 kmol ideálního plynu o tlaku  $p$ . O kolik stupňů Celsia musíme plyn mezi písty ohřát, aby se písty posunuly o  $x$  směrem vzhůru?



Obr.30

**Řešení:**

Nejprve si vyjádříme tlak  $p$  uvnitř dvojpístu. Na dvojpíst působí okolní vzduch silou o velikosti  $p_a(S_1 - S_2)$  dolů a plyn uvnitř dvojpístu působí na něj silou o velikosti  $p(S_1 - S_2)$  nahoru. Dále na něj působí tíhová síla o velikosti  $mg$ . Tedy platí:

$$p(S_1 - S_2) = mg + p_a(S_1 - S_2)$$

$$p = p_a + \frac{mg}{S_1 - S_2}$$

Označme  $p$ ,  $V$  a  $T$  tlak, objem a teplotu plynu před začátkem ohřívání a  $p'$ ,  $V'$  a  $T'$  po ohřátí plynu. Ze stavové rovnice plyne:

$$nR = \frac{pV}{T} = \frac{p'V'}{T'}$$

Jestliže i po ohřátí bude soustava v rovnováze, musí platit  $p' = p_a + mg/(S_1 - S_2)$  a tedy i  $p = p'$ . Objem se posunutím pístu zvětšil o  $(S_1 - S_2)x$ , tedy platí  $V' = V + (S_1 - S_2)x$ . Teplota se zvýšila o  $\Delta T$ , tedy  $T' = T + \Delta T$ . Dosazením do stavové rovnice získáme:

$$\frac{pV}{T} = \frac{p(V + (S_1 - S_2)x)}{T + \Delta T}$$

$$V\Delta T = T(S_1 - S_2)x$$



Ze stavové rovnice spočteme  $T$  a dosadíme do posledního vztahu:

$$T = \frac{pV}{nR}$$

$$\Delta T = \frac{p}{nR}(S_1 - S_2)x = \left( \frac{p_a}{nR} + \frac{mg}{(S_1 - S_2)nR} \right) (S_1 - S_2)x = \frac{p_a(S_1 - S_2) + mg}{nR}x$$

### Úloha V.2 ... hradní studna

Řešitel Fykosu měřil hloubku hradní studny. Vzal si na pomoc stopky a kámen. Kámen vhodil do studny a současně spustil stopky. Zastavil je poté, co uslyšel náraz kamenu na dno. Stopky ukázaly údaj 4,77 s. Jelikož si náš přítel pamatoval velikost tíhového zrychlení a rychlost zvuku, ihned na místě spočítal hloubku (vyschlé) studny. Dokážete to také? Určete zároveň chybu popsaného měření.

#### Řešení:

Nejprve zde ukáží nejjednodušší model popsané situace a pak budu diskutovat jeho vhodnost pro náš problém, možná vylepšení a nakonec i zadáním požadovanou chybu měření.

V prvním přiblížení můžeme brát, že kámen padá do hloubky studny  $h$  volným pádem s tíhovým zrychlením  $g$  po dobu  $t_1$  a poté za čas  $t_1$  dorazí zvuk ze dna k uchu pozorovatele. Student potom naměří na stopkách čas  $t$ , který je roven součtu  $t = t_1 + t_2$ , při označení rychlosti zvuku jako  $v$  můžeme psát

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v}.$$

Poslední vztah snadno jednoduchými matematickými úpravami převedeme na kvadratickou rovnici

$$h^2 + h \left( \frac{-2tv - 2v^2}{g} \right) + v^2 t^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h = tv + \frac{v^2}{g} \pm \frac{1}{g} \sqrt{v^4 + 2v^3 gt}.$$

Ze dvou kořenů této rovnice má fyzikální smysl ten menší (neboť ten větší by dával  $h$  větší než délku  $vt$ , což není možné), proto řešením naší úlohy je

$$h = tv + \frac{v^2}{g} - \frac{1}{g} \sqrt{v^4 + 2v^3 gt}.$$

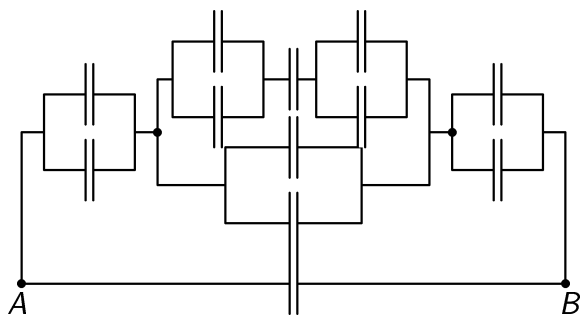
Pokud nyní dosadíme číselné hodnoty, dostaneme  $h = 98,6$  m (závisí na tom, v jakých tabulkách hledáme příslušné konstanty).

Předcházející model nám ukazoval nejjednodušší způsob, jak se k úloze postavit. Provedli jsme však při něm mnohá zanedbání. Záleží samozřejmě na fyzikálním citu, co zanedbat lze a co naopak může výsledek ovlivnit viditelněji.

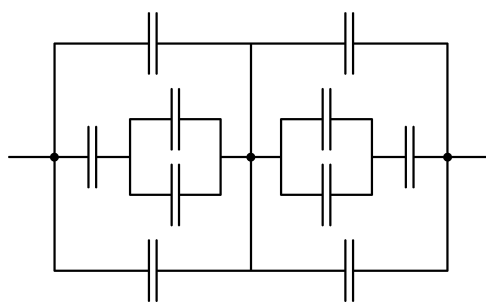
- Při výpočtu jsme neuvažovali odpor vzduchu. Pokud se pokusíme tuto skutečnost uvážit, je důležité umět si vybrat, který ze vztahů pro odporovou sílu je vhodné použít. Fyzika nám zde nabízí vzorce Newtonův, Stokesův, Karmánův ..., každopádně každý z nich vyžaduje znát o kameni spoustu parametrů. Pokud se pro náš pád kamene (vzhledem k jeho rychlostem a vlastnostem vzduchu) rozhodneme pro vzorec Newtonův a pokud se pokusíme odhadnout vhodné parametry kamene, může se nám výsledek změnit až o deset metrů (výpočet vede na jednoduchou obyčejnou diferenciální rovnici).

- Při výpočtu jsme též brali rychlost zvuku jako konstantu. To rovněž není tak úplně pravda, neboť rychlost zvuku závisí na teplotě, která zase závisí na hloubce studny. Vzhledem





Obr. 32



Obr. 33

A–C Podobně jako v předchozím případě spojíme vhodné uzly, tj. B–D–F–H. Obdržíme něco jako je na obrázku 33.

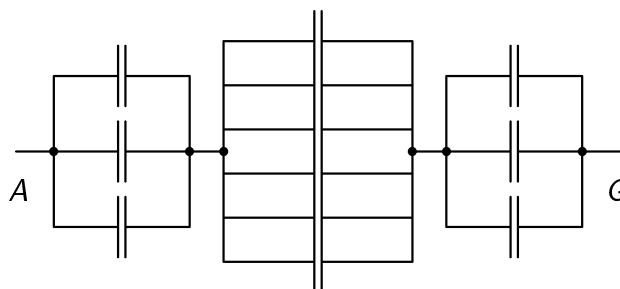
A opět máme řešení raz dva:

$$C_{A-C} = \frac{4}{3}C$$

A–G A do třetice spojíme vrcholy B–D–E a C–F–H. Dostaneme krásné zapojení za obrázku 34.

Z toho máme výsledek:

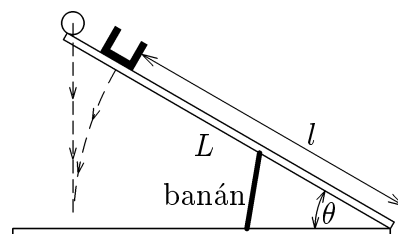
$$C_{A-G} = \frac{6}{5}C$$



Obr. 34

### Úloha V.4 ... cvičená opice

Novopečený majitel zoologické zahrady by měl rád v pavilonu opic následující atrakci (viz obr. 35). Na jednom ze dvou prkýnek spojených pantem je ve vzdálenosti  $l$  od pantu připevněn miniaturní košíček a na konci prkýnka (ve vzdálenosti  $L$  od pantu) je položen míček. Prkýnko je podepřeno banánem, a svírá se zemí úhel  $\theta$ . K této „aparatuře“ přijde hloupá opice (zatím nebyl čas ji vycvičit), a vezme si banán.



Obr. 35

Vyvrcholením atrakce by mělo být to, že odbrzděné prkénko se dá do pohybu a míček by měl sám spadnout do košíčku. Diskutujte, zda-li je to vůbec možné a pokud ano, spočtete jaké musí být  $l$  v závislosti na  $L$  a úhlu  $\theta$ .

### Řešení:

Po odstranění banánu začne prkno s míčkem a košíčkem padat dolů. Předpokládáme, že míček je nějakým způsobem na prkénku přichycen a samovolně nespadne. Pokud se bod, na kterém leží míček, bude pohybovat s větším zrychlením než míček, odpojí se míček od prkna. Pokud bude zrychlení míčku větší, začne se kutálet po prkně dolů a bude po atrakci.

Pro náš případ neuvvažujeme odpor vzduchu, poloha osy otáčení se nemění (např. prkno je na pantu bez tření), zanedbáme rozměry košíčku a odstranění banánu považujeme za okamžité a předpokládáme, že opice při tom nedá prkénku žádný impuls síly.

Nejprve si tedy spočítáme zrychlení bodu svise pod míčkem pro každý úhel  $\varphi < \Theta$ . Začneme pohybovou rovnicí:

$$M = J\varepsilon \tag{25}$$

kde  $M$  je moment síly způsobující zrychlení prkna,  $J$  je moment setrvačnosti prkna a  $\varepsilon$  je úhlové zrychlení. Pokud zanedbáme hmotnost košíčku, můžeme podle Steinerovy věty psát:

$$J = J_0 + m \left( \frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} mL^2 \quad (26)$$

kde  $J_0 = \frac{1}{12} mr^2$ . Pro moment  $M$  tíhové síly vůči ose otáčení platí:

$$M = \frac{1}{2} F_G L \cos \varphi \quad (27)$$

kde  $\varphi$  je okamžitý úhel svíraný prknem a podložkou. Dosazením (26) a (27) do (25) dostaneme:

$$\frac{1}{2} g \cos \varphi = \frac{1}{3} L \varepsilon \quad (28)$$

Tečné zrychlení ve vzdálenosti  $r$  od osy otáčení lze napsat jako

$$a = r \varepsilon \quad (29)$$

Vzdálenost  $r$  se snadno vyjádří jako

$$r = L \frac{\cos \Theta}{\cos \varphi}. \quad (30)$$

Z (30) a (29) tedy plyne:

$$a = L \varepsilon \frac{\cos \Theta}{\cos \varphi} \quad (31)$$

Ze vztahů (28) a (31) potom dostaneme:

$$a = \frac{3}{2} g \cos \Theta \quad (32)$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že zrychlení bodu, který se nachází pod míčkem je konstantní v čase a závisí pouze na počátečním úhlu  $\Theta$ . Podmínku pro úspěšný pád míčku do košíčku můžeme dostat dvěma způsoby.

1. v každém okamžiku pádu musí platit  $a \geq g$ . Po dosazení za  $a$  z (32) dostaneme podmínku.

$$\cos \Theta \geq \frac{2}{3} \quad (33)$$

2. prkénko musí spadnout dříve než míček. Pro dobu pádu prkna (bodu pod míčkem) platí vztah  $L \sin \Theta = \frac{1}{2} a t_p^2$  a pro dobu pádu míčku platí  $L \sin \Theta = \frac{1}{2} g t_m^2$ . Po dosazení za  $a$  z (32) a předpokladu  $t_p \leq t_m$  dostaneme opět podmínku (33).

Pro počáteční úhel tedy musí platit  $\Theta \leq 48^\circ 11' 22,87''$ .

Vzdálenost košíčku od osy otáčení spočteme velmi jednoduše pomocí goniometrických funkcí pravoúhlého trojúhelníka. Platí tedy:

$$l = L \cos \Theta .$$

Úloha V.5 ... *samopal*

Rozhodněte jak těžkou krychli lze převrátit střelbou ze samopalu (či spíše menšího děla) o parametrech 50 střel za sekundu, rychlost střely  $500 \text{ ms}^{-1}$ , hmotnost střely 100 g. Krychle má hranu dlouhou 1 m, po podložce neklouže.

## Řešení:

Nejvýhodnější bude zřejmě střílet na krychli kolmo ke stěnové úhlopříčce tak, aby ji střely zasáhly v hraně ležící proti hraně, okolo níž se bude krychle natáčet (jelikož krychle po podložce neklouže, můžeme si tam představit třeba pant). Takto letící střely budou mít vůči ose otáčení největší moment hybnosti. Pro jednoduchost uvažujme, že samopalem můžeme v průběhu střelby otáčet tak, aby se moment hybnosti střel neměnil, a že se střely odrážejí, tj. hmotnost krychle je konstantní. Předpokládejme též, že se odrážejí ve směru úhlopříčky, takže jejich výsledný moment hybnosti je nulový. To lze zdůvodnit tím, že rychlost bodu krychle, na nějž střela dopadne, bude malá oproti rychlosti střely, a bude tedy platit zákon dopadu a odrazu.

Při dopadu střely platí zákon zachování momentu hybnosti

$$mv\sqrt{2}a = J\omega_0 ,$$

kde  $m$  je hmotnost střely,  $v$  její rychlost,  $a$  délka hrany krychle,  $J$  moment setrvačnosti krychle vzhledem ke hraně a  $\omega_0$  předaná úhlová rychlost. Moment setrvačnosti určíme buď pomocí tabulek a Steinerovy věty, nebo přímou integrací:

$$J = \int_0^a \int_0^a \int_0^a (x^2 + y^2) \rho \, dx \, dy \, dz = \rho \left[ \left[ \left[ z \left( \frac{x^3}{3} y + x \frac{y^3}{3} \right) \right]_0^a \right]_0^a \right]_0^a = \rho \frac{2}{3} a^5 = \frac{2}{3} M a^2$$

Krychle tedy na začátku získá úhlovou rychlost  $\omega_0$ , po dobu  $T = 1/f$ , kde  $f$  je frekvence střelby (kadence), se pohybuje podle pohybové rovnice pro otáčení v tíhovém poli až do dopadu na podložku, převrácení se nebo přiletu další střely, pak se její rychlost opět skokem změní o  $\omega_0$  a tak pořád dokola. Pokud si parametrizujeme polohu krychle úhlem natočení její spodní stěny oproti podložce  $\alpha$ , má pohybová rovnice pro ono mezidobí mezi přiletly dvou střel tvar

$$J\ddot{\alpha} = -Mg \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \left( \frac{\pi}{4} + \alpha \right) ,$$

kde  $M$  je hmotnost krychle. Výraz na pravé straně představuje moment tíhové síly vzhledem k ose otáčení. Tato rovnice je díky přítomnosti goniometrické funkce analyticky neřešitelná, budeme se tedy muset uchýlit k aproximacím. Pokud nahradíme kosinus v prvním přiblížení konstantou  $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , redukuje se problém pohybu krychle po přiletu první střely na variaci na téma volný pád. Řešením je

$$\alpha = \omega_0 t - \frac{1}{2} \frac{Mga}{2J} t^2 ,$$

$$\omega = \omega_0 - \frac{Mga}{2J} t .$$

Kulminace nastane v čase

$$\tau = \frac{2J\omega_0}{Mga} = \frac{2\sqrt{2}mva}{Mga} = \frac{2\sqrt{2}mv}{Mg}$$

a dopad zpět v čase dvojnásobném. Mezní perioda střelby leží mezi těmito dvěma časy, neboť střela, která přiletí před kulminací krychli určitě převrátí (moment tíhové síly pro

druhou střelu je o trošičku menší než pro první a krychle zbyla ještě nějaká rychlost směrem nahoru), ale střela, která přiletí po dopadu, už bude jenom opakovat to, co dělala ta před ní. Získáváme tak nerovnosti

$$\frac{2\sqrt{2}mv}{Mg} < T < \frac{4\sqrt{2}mv}{Mg},$$

které upravíme na

$$\frac{2\sqrt{2}mv}{Tg} < M < \frac{4\sqrt{2}mv}{Tg}.$$

Číselně  $720 \text{ kg} < M < 1440 \text{ kg}$ . Zpětným dosazením do výrazu pro  $\alpha$  vidíme, že oba dva členy jsou řádu  $10^{-3}$  radiánu, díky čemuž je v tomto oboru hmotností naše aproximace korektní.

Výsledek, který jsme obdrželi, není nijak slavný. Rozmezí je široké a my se můžeme jen dohadovat, zda se skutečná mezní hmotnost bude blížit spíš dolní nebo horní hranici. Pokud prodloužíme naši aproximaci i tam, kde už prokazatelně nemá co dělat, tedy nahradíme skutečný moment tíhové síly konstantou  $-Mga/2$  i pro další střely, vidíme, že přírůstek natočení  $\Delta\alpha_n = \alpha_n - \alpha_{n-1}$ , kde  $\alpha_n$  je poloha krychle v okamžiku přiletu střely, závisí pouze na počáteční úhlové rychlosti krychle a ta je s rostoucím  $n$  menší a menší, přilétají-li střely až za kulminací. V reálném případě bude tedy závislost  $\alpha_n$  na  $n$  zprvu konkávní a pro hmotnosti blízké 720 kg se krychle dostane tak vysoko, že snížení momentu tíhové síly vlivem natočení tento efekt převáží, závislost se změní na konvexní a krychle přepadne. Numerické řešení (např. v programu Famulus) ukazuje, že skutečná mez leží okolo 740 kg.

Někteří z vás řešili tuto úlohu pomocí zákona zachování energie. To je bohužel špatně. Pokud totiž krychle stačí dopadnout dříve, než ji zasáhne další střela, veškerou získanou energii ztratí a začíná zase od nuly. Při pružné i při nepružné srážce se navíc nepředá krychli celá kinetická energie střely.

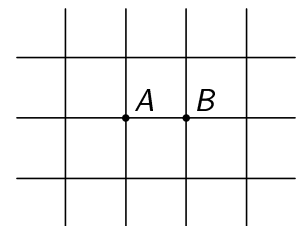
Závěrem ještě odpověď dvěma či třem řešitelům, kteří se pozastavili nad parametry zbraně. Ptal jsem se na to, prý existuje letecký kanón GAU 8 s kadencí 70 ran za sekundu nebo protiraketový systém Phalanx s šesti hlavními v jednom svazku a 100 ranami za sekundu.

### Úloha VI.1 ... síť sítí

Spočtete elektrický odpor  $R$  mezi body A a B nekonečně rozlehlé čtvercové sítě (viz obr. 36). Jednotlivé úsečky tvořící síť mají odpor  $R_0$ .

#### Řešení:

Označím si A a B dva sousední body mřížky. Bod A spojím s „nekonečnem“ zdrojem proudu tak, aby z bodu A vytékal proud  $I$ . Vzhledem k symetrii mřížky, bude mezi body A a B napětí  $IR_0/4$ . Nyní naopak spojím bod B s „nekonečnem“ zdrojem proudu tak, aby do bodu B vtékal proud  $I$ . Vzhledem k symetrii mřížky, bude mezi body A a B napětí  $IR_0/4$  a to ve stejném směru jako v prvním případě. Jestliže nyní zapojím oba zdroje proudu, bude mezi body A a B napětí  $IR_0/2$ , z bodu A bude vytékat proud o velikosti  $I$ , do bodu B bude naopak vtékat. Vzhledem k tomu, že „nekonečno“ je v obvodu zapojeno mezi dva zdroje proudu, které jsou stejně připojeny k mřížce, je v něm napětí nulové (je rovno průměru napětí v bodech A a B). Vzhledem k symetrii, mohu nekonečno od obou zdrojů proudu odpojit, aniž bych změnil stav obvodu. Nyní mám zdroj proud o velikosti  $I$  připojený mezi body A a B. Mezi těmito body je napětí  $IR_0/2$  a tedy odpor mezi body A a B je  $R_0/2$ .



Obr.36

**Úloha VI.2 ... izotop**

Na pracoviště nukleární medicíny byla doručena zásilka izotopu A. V dokumentech, které přišly spolu s izotopem, bylo uvedeno, že 11,5 min po vyndání z reaktoru, kde tento izotop vzniká v čisté formě, byla aktivita zásilky 1000 rozpadů  $\gamma$  za sekundu. Když přeměřil aktivitu doručené zásilky bezpečnostní technik, zjistil, že je také 1000 rozpadů  $\gamma$  za sekundu. Určete dobu transportu zásilky, když víte, že se A rozpadá  $\beta$  rozpadem s poločasem 23 minut na B, které se s poločasem 23 dní rozpadá za emise  $\beta$  a  $\gamma$  na stabilní nuklid C.

**Řešení:**

Počet rozpadů  $\gamma$  za jednotku času je podle zadání a definice aktivita látky B. Ta je úměrná počtu částic B ve vzorku v daném čase. V čase 11,5 min po vyndání z reaktoru můžeme zanedbat rozpad látky B na látku C a uvažovat pouze rozpad A na B, který se děje podle exponenciálního zákona:

$$N_A = N_{A0}e^{-\lambda t} \quad N_B = N_{A0}(1 - e^{-\lambda t})$$

Poločas rozpadu  $T$  je definován vztahem  $e^{-\lambda T} = \frac{1}{2}$ , po 11,5 minutách (polovině poločasu rozpadu A) byl tedy počet částic látky B

$$N_B = N_{A0} \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Číslo v závorce je zhruba 0,293, to znamená, že výsledek bude řádově stejný jako poločas rozpadu B na C. Můžeme tedy předpokládat, že A se rozpadlo téměř celé v prakticky nulovém čase a rozpad B tedy probíhá opět exponenciálně:

$$N_B = N_{B0}e^{-\lambda' T'}$$

Protože zaniknutím jedné částice A vznikne jedna částice B, rovnají se  $N_{A0}$  a  $N_{B0}$ . Chceme, aby počet částic byl stejný jako v čase 11,5 min, což při uvážení definice poločasu rozpadu vede na rovnici

$$1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{T'}{\tau}},$$

kterou vyřešíme logaritmováním

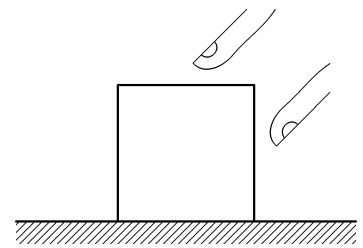
$$\tau = -T' \frac{\ln(1 - 1/\sqrt{2})}{\ln 2} \doteq 41 \text{ dní}$$

**Úloha VI.3 ... kostka**

Když se pokusíme uchopit kostku tak, jak je naznačeno na obr. 37, ne vždy se nám to povede. Určete podmínku, za které se to podaří.

**Řešení:**

Abychom udrželi kostku v rovnováze, musíme především dosáhnout rovnováhy sil. Ve vodorovném směru spolu soupeří síly  $F_B$  a třecí síla v místě A, která může nabýt maximální hodnoty  $fF_A$  ( $f$  je koeficient smykového tření), tedy



Obr.37

$$fF_A \geq F_B. \quad (34)$$

Ve svislém směru máme tři síly a rovnice rovnováhy je

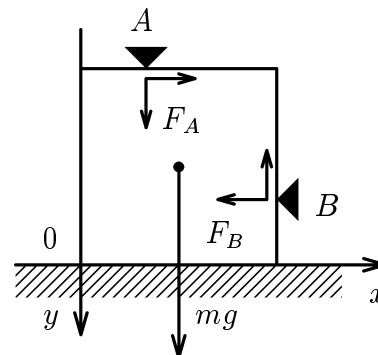
$$fF_B - F_A \geq mg. \quad (35)$$

Dosazením (34) do (35) dostáváme

$$F_A(f^2 - 1) \geq mg. \quad (36)$$

Pokud budeme chtít tuto nerovnici splnit, můžeme volit  $F_A$  libovolně velké kladné, ale splnit se nám ji podaří jen v případě ( $mg$  je kladné), že i  $f^2 - 1$  je kladné. Protože koeficient tření je také kladný, splní to jen  $f > 1$ . Ačkoliv se některým z vás zdálo podivné, že koeficient tření může být větší než 1, není na tom nic divného. Zkuste si třeba namazat stůl vhodným lepidlem (doporučujeme dovozový Chemopren) a táhněte po stole něco lehkého. Sice to pojede, ale tažná síla bude mnohonásobně větší, než tíha tělesa. A právě ten poměr je koeficient tření.

Aby byla kostka v dokonalé rovnováze, je třeba diskutovat ještě její rotační pohyby. Z těchto rovnic neplyne nic objevného, co by vyvážilo jejich složitost a proto je zde pro nedostatek místa neuvědeme.



Obr.38

#### Úloha VI.4 ... alternátor

Představte si rotující kovový disk (disk rotuje kolem pevné osy identické s osou rotační symetrie disku) v časově neměnném magnetickém poli tak, že vektor  $\vec{B}$  magnetické indukce pole směřuje kolmo na plochu disku. Určete napětí (měřené naprázdno) mezi kterýmikoli dvěma body disku, případně i proud, který by tekla měřícím obvodem, kdyby měřící přístroj neměl ideálně nekonečný odpor.

#### Řešení:

Uvědomme si nejprve toto: ze symetrie je zcela jasné, že body disku, které jsou stejně daleko od středu, mají stejný potenciál. Nenulové napětí bude tedy pouze mezi body, jejichž vzdálenost od středu je různá.

Na nabitě částice v disku působí magnetická síla

$$F_m = qvB,$$

kteřá má směr buď od nebo do středu (podle znaménka náboje). Na začátku se budou náboje (hlavně elektrony) v důsledku této síly pohybovat. Náboje se v disku uspořádají tak, aby elektrická síla ( $F_e = qE$ ) byla v rovnováze se silou magnetickou. Mohli bychom ještě uvážit sílu odstředivou, avšak my tak neučiníme, neboť tato je v porovnání s výše uvedenými velmi malá.

Pro rychlost pohybu máme  $v = \omega r$ . Intenzita tedy splňuje vztah

$$E = \omega r B.$$

Tedy napětí mezi body ve vzdálenostech od středu  $r_1, r_2$  je

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E dl = \frac{1}{2} \omega B (r_2^2 - r_1^2).$$

Proud, který poteče měřákem, je možné rozumně vypočítat za předpokladu, že moc neovlivní magnetické pole a že měrný odpor disku je takřka nulový (jinak je to velmi složité). Pokud přijmeme ony osudné předpoklady a označíme  $R$  odpor měřáku, je kýžený výsledek

$$I = \frac{U}{R} = \frac{\omega B (r_2^2 - r_1^2)}{2R}.$$



**Úloha VI.5 ... zastavení v zatáčce**

Představte si, že jednou budou u nás vlaky jezdit opravdu rychle. Nechť rychlík zastaví v oblouku o poloměru 500 m, který je klopen pro rychlost 200 km/h (tzn. že na cestujících v jedoucím rychlíku působí neustále síla jen kolmo dolů). A protože lidé jsou zvědaví, vykloní se všichni z oken na vnitřní straně oblouku, aby zjistili, co se děje. Vaším úkolem je zjistit, kolik lidí musí ve vlaku být, aby se překlopil.

Vlak je složen z 10 čtyřosých rychlíkových vozů o délce 25 m, šířce 3 m, výšce 4,2 m a hmotnosti 40 t. Těžiště vozu je ve výšce 1,2 m od hlavy kolejnice, rozchod koleji je 1738 mm. Spodní okraj otevřeného okna nechť je ve výšce 2,5 m.

**Řešení:**

Nejprve se musím všem řešitelům omluvit za malou chybu. Rozchod kolejí jsem omylem zadal jako 1738 mm místo 1435 mm. Při zachování ostatních hodnot by se vlak při daném klopení převrhl sám.

Nejprve bylo nutno vypočíst klopení oblouku. Každý přišel na to, že

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{rg}, \quad (37)$$

kde  $v$  je rychlost vlaku,  $r$  poloměr oblouku a  $g$  gravitační zrychlení.

Předpokládejme, že lidé se vykloní tak, že jejich těžiště bude na dolním okraji otevřeného okna. Situaci rozebereme pouze pro jeden vůz, neboť vozy jsou spojeny pohyblivými spřáhly. Dále nebudeme uvažovat, že vozy působí na sebe navzájem, neboť se mohou volně pohybovat po kolejích. Platí tato momentová věta:

$$am_v = Nbm_l, \quad (38)$$

kde  $m_v$  je hmotnost jednoho vagónu,  $m_l$  průměrná hmotnost člověka,  $N$  počet lidí v jednom vagónu,  $a$  rameno síly působící na vagón a  $b$  rameno síly působící na člověka. Ramena je možno vypočíst různými způsoby, např. vypočíst souřadnice působišť daných sil v soustavě, kde osy jsou spojeny s vozem (osa  $x$  rovnoběžně s podlahou) a pak je do transformovat do souřadné soustavy s osou  $x$  vodorovnou:

$$\begin{aligned} a &= \frac{l}{2} \cos \alpha - h_t \sin \alpha, \\ b &= h_o \sin \alpha + \frac{s-l}{2} \cos \alpha, \end{aligned}$$

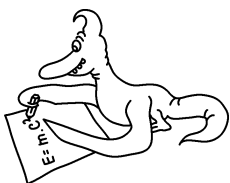
kde  $l$  je rozchod kolejí,  $h_t$  výška těžiště,  $h_o$  výška okraje okna a  $s$  šířka vozové skříně.

Po dosazení do (38) dostaneme výsledný vztah pro počet lidí na jeden vagón:

$$N = \frac{m_v}{m_l} \frac{l \cos \alpha - 2h_t \sin \alpha}{2h_o \sin \alpha + (s-l) \cos \alpha}.$$

Počet lidí vychází asi 29,5 osoby na vagón při průměrné hmotnosti člověka 70 kg, čili 295 lidí rovnoměrně ve vlaku.

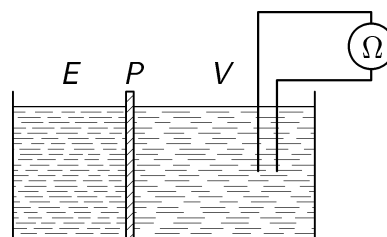
Nyní k realnosti úlohy. Především klopení nebude ve skutečnosti asi tak velké. Poloměr bude pro vysoké rychlosti asi větší a úhel klopení bude menší, než vypočtený dle vztahu (37). Otázkou je výška těžiště vagónu, neboť tu jsem musel odhadnout. Takže, v reálu by asi bylo potřeba více lidí.



## Řešení experimentálních úloh

### Úloha I.Exp ... měření difúze ve sklenici vody

Námětem první experimentální úlohy je jev difúze v kapalině. V kádince je přepážkou  $P$  oddělena voda  $V$  od roztoku elektrolytu  $E$  (např. roztok kuchyňské či jiné soli), viz obr. 39. V čase  $t_0 = 0$  přepážku odstraníte a ohmmetrem budete sledovat pokles elektrického odporu s časem. Po měření vysvětlíte kvalitativně a kvantitativně pozorované změny.



Obr.39

### Řešení:

Specifikujme jevy, které probíhají při měření. V první řadě je to pronikání roztoku soli do druhé části nádoby podél přepážky i skrz ní. Ovšem nemá to takový význam na výsledek pokusu, jako další uvedené jevy, probíhající v nejméně sledovaném úseku těsně po vytažení přepážky.

Mezi tytéž efekty, které se projeví značně, patří cirkulace kapaliny, jejíž vliv je tím větší, čím je nádoba menší nebo čím rychleji vytahujeme přepážku. Tento jev lze určitě eliminovat zvýšenou opatrností, zcela se ho ovšem nezbavíme nikdy. Můžeme ale pokus modifikovat např. tak, že sestrojíme dvojitou přepážku, kde jedna její část bude mít tenké otvory, nebo že necháme jednoduše roztok propouštět okamžitě při nalévání. Pokud budou otvory mít tvar vodorovné štěrbiny odstraníme tím i ten efekt, kdy po vytažení přepážky hustší roztok klesá dolů, čímž plocha rozhraní roztoku a vody z vodovodu orientuje spíše vodorovně než svisle.

Tento jev cirkulace tedy zastiňuje difúzi jako jev, který chceme měřit. Zde máme dvě možnosti: snažit se cirkulaci potlačit a dospět k měření difúze, nebo zkoumat jev jako celek. V naměřených závislostech se cirkulace projevuje oscilacemi hodnoty odporu.

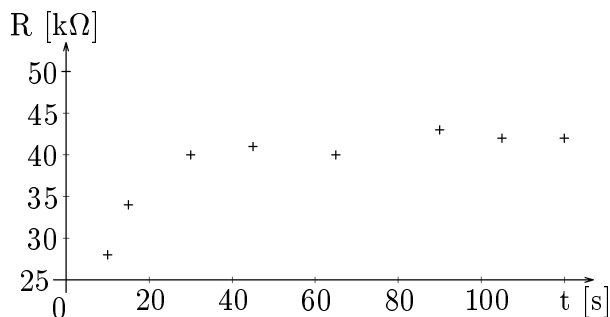
Další problémy se týkají volby koncentrace roztoku. To je spojeno s jevem disociace v roztoku a s následným vznikem článku, který má opačnou polaritu než napětí přiváděné k měření odporu.

Aby bylo možno posoudit vztah výše uvedených jevů k naměřeným hodnotám, je samozřejmě popsáno použitou aparaturou. Neměly by tedy chybět hodnoty rozměru nádoby, umístění přepážky, vzdálenost elektrod a jejich poloha v nádobě, dále by měl být uveden popis měřicího přístroje, tj. napětí přiváděné do roztoku, atd.

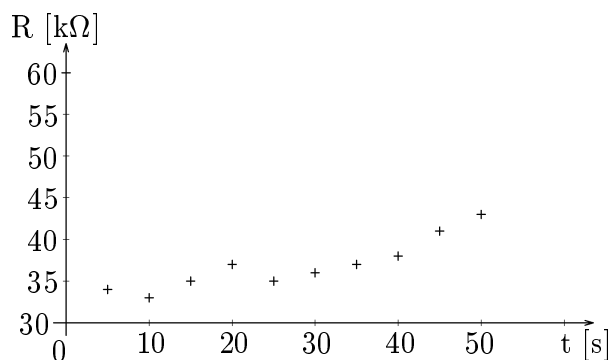
Co se týče naměřených hodnot, musíme si uvědomit, že velmi záleží na subjektu experimentátora, jak rychle vytahuje přepážku a jak nalévá roztoky. Z toho plyne, že více než kdy jindy bychom měli provést pokusy více, abychom zjistili, jaký vliv máme na měření my sami.

Pro ilustraci toho, že lze naměřit velmi rozdílné závislosti, ovšem i toho, že jevy výše uvedené jsou evidentně patrné, jsme vybrali hodnoty naměřené Martinem Kempou. Naměřeny byly v akváriu o objemu 8 l, ve kterém byl 1 l čisté vody, s elektrodami umístěnými ve vzdálenosti cca 10 cm od sebe. Roztoky v jednotlivých pokusech byly namíchany po řadě takto: 50 g soli na 1 l, 50 g 0,6 l, 45 g 0,5 l, 25 g 0,4 l, 20 g 0,4 l.

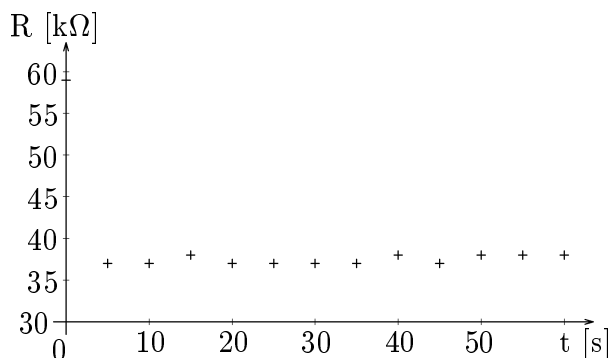
Z jednotlivých grafů je patrné, jak vše velmi závisí na konkrétní realizaci. Velké změny průběhů charakteristik jistě nejsou způsobeny pouhou koncentrací soli.



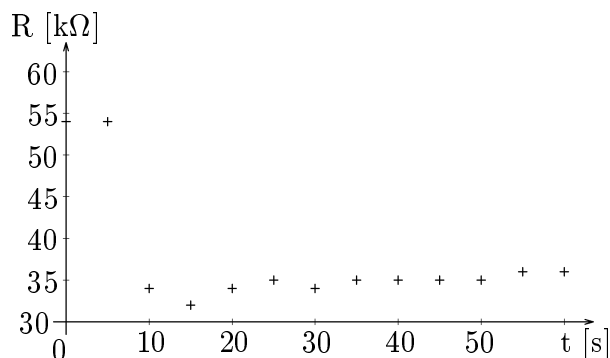
Obr. 40



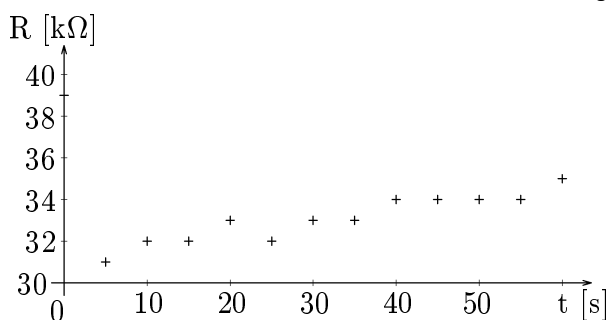
Obr. 41



Obr. 42



Obr. 43



Obr. 44

### Úloha II.Exp ... *kadeřnictví v rukou fyzika*

Změřte pomocí fénu (ručního elektrického vysoušeče vlasů) tepelnou kapacitu vzduchu.

*Poznámka:* Připomínáme, že experimentální úloha je od slova experimentovat. Proto neváhejte a místo teoretických výpočtů se chopte fénu a opravdu si to zkuste. Kromě experimentálních zážitků budete oceněni i tím, že experimentální úloha je hodnocena tradičně více, než ostatní úlohy.

#### Řešení:

Uvedu dvě nejčastější (a zároveň nejsmysluplnější) metody měření.

Nejprve si řekněme, jaký aparát chceme použít, tedy i jaké veličiny chceme měřit. Energie  $E$  dodaná fénem je

$$E = Pt$$

kde  $P$  je výkon dodávaný vzduchu a  $t$  je čas, po který vzduch zahříváme. Měrná tepelná kapacita vzduchu potom ukazuje, kolik energie (tepla)  $Q$  je vzduch schopen pojmout:

$$Q = mc(T_k - T_p)$$

kde  $c$  je měrná tepelná kapacita vzduchu,  $m$  je hmotnost vzduchu, kterou určíme z objemu  $V$  a hustoty vzduchu  $\rho = 1,2 \text{ kgm}^{-3}$  jako  $m = \rho V$ ,  $T_p$  a  $T_k$  jsou počáteční a konečná teplota vzduchu.

Pokud předpokládáme, že energie dodaná fénem ohřívá vzduch, tj.

$$E = Q$$

potom jednoduchými úpravami dostaneme

$$c = \frac{Pt}{(T_k - T_p)\rho V} \quad (39)$$

Potřebujeme tedy změřit objem vzduchu, který se ohřeje za určitý čas, a počáteční a konečnou teplotu vzduchu.

*První metoda:*

Nalezneme co nejlépe tepelně izolující nádobu, do které uzavřeme fén s teploměrem. Proces měření je zřejmý. Fén zapneme na určitou dobu, sledujeme, o kolik se ohřál vzduch v nádobě. Objem nádoby změříme.

Zřejmě není příliš vhodné použít místnost, neboť ta není příliš dobře tepelně izolovaná, a než fén ohřeje takové množství vzduchu, tak se vzduch stěnami místnosti stačí ochladit. Navíc my sami ovlivňujeme teplotu vzduchu.

Já jsem použil skříň s rozměry  $v \times h \times b$ :

$$v = (0,33 \pm 0,01) \text{ m},$$

$$h = (0,39 \pm 0,01) \text{ m},$$

$$b = (0,41 \pm 0,01) \text{ m},$$

a měřil jsem po dobu deseti sekund ( $t = (10,00 \pm 0,05) \text{ s}$ ). (Odhady chyb plynou z toho, že jsem měřil pravítkem a stopoval vteřinovou ručičkou na hodinkách. Jde o chyby střední, tzn. že hodnota naměřené veličiny leží na 99% v intervalu určeném trojnásobkem této střední chyby (tzv. mezní chyba).) Hodnotu měrné tepelné kapacity jsem nejprve spočetl orientačně z prvního pokusu (tabulka 1), přičemž jsem použil hodnotu příkonu udanou výrobcem fénu  $P = 1200 \text{ W}$  (hodnotu by bylo samozřejmě nejlepší zjistit přímým měřením napětí a proudu v obvodu, já předpokládám střední chybu uvedené hodnoty 5%).

Ze vztahu (39) vypočte hodnota

$$c \simeq 30\,000 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\text{K}^{-1}$$

což je o řád a půl větší, než hodnota z tabulek ( $c = 1003 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ ).

Podrobnější proměření a výpočty včetně výpočtů chyb tedy zřejmě nemají své opodstatnění. Důležité ovšem je provést ještě alespoň dvě měření, abychom zjistili, zdali to jedno provedené měření nebylo úplně špatně — viz tabulka 1:

Tabulka 1.

č. m.	$T_p$ [°C]	$T_k$ [°C]	$t$ [s]
1	21,5	28,0	10,0
2	24,0	30,0	10,0
3	23,5	30,0	10,0

Měření rozdílů teplot ovšem provádíme v určité výšce nad dnem nádoby. Samozřejmě, čím výše, tím teplejší vzduch. Ve skříni vzniká tedy gradient teploty, jehož proměřováním se celý pokus komplikuje. Můžeme použít nádobu malé výšky, ale jednodušší a lepší je měřit druhou metodou.

*Druhá metoda:*

Měříme přímo u výstupu fénu, na jakou teplotu se nám vzduch fénem ohřeje. Potom je ovšem třeba určit ještě objemový průtok  $V/t$  vzduchu fénem.

Nejlepší by samozřejmě bylo určit rychlost vycházejícího vzduchu, např. lopatkovým kolem. To se ale nutně nemusí točit takovou rychlostí, jakou vychází vzduch z fénu, neboť pohyb vzniká odporem vzduchu. Rychlost otáčení zřejmě ovlivňuje také turbulentní proudění okolo lopatek. Navíc není jednoduché ani určení frekvence otáčení kola.

Nejjednodušší a nejdostupnější je přivázat na hrdlo fénu igelitový sáček, sledovat, za jak dlouho se naplní, a potom změřit jeho objem.

Moje měření touto cestou jsou uvedena v tabulce 2:

Tabulka 2.

č. m.	1	2	3	4	5	průměr	$\Delta't$
$t$ [s]	0,660	0,640	0,710	0,600	0,710	0,664	0,042

Měření jsem prováděl pomocí malého programu, který určoval časový rozdíl mezi dvěma stisky klávesy, které jsem stiskl současně se zapnutím a vypnutím fénu. Je to metoda velmi nepřesná, proto jsem provedl jen pět měření (mělo by jich být alespoň osm), přičemž ke směrodatné odchylce  $\Delta't$  vzešlé ze statistického zpracování připočítávám ještě odhad chyby  $\Delta''t = 0,050$  s takto:

$$\Delta t = \sqrt{\Delta't + \Delta''t} = 0,065 \text{ s}$$

(Statistické zpracování spočívá ve výpočtu průměru hodnot, hodnoty by měly ležet v intervalu určeném trojnásobkem směrodatné odchylky  $\sigma = \sqrt{(n \sum x^2 - (\sum x)^2)/n}$  (tzv. 3- $\sigma$  kritérium). Směrodatná odchylka je zároveň chyba průměrné hodnoty.)

Objem igelitového sáčku jsem změřil tak, že jsem do něj napustil vodu, když jsem ho předtím vložil do kýblu. Není to příliš přesné měření:  $V = (0,0070 \pm 0,0005) \text{ m}^3$ .

Teplotní měření jsem provedl v místnosti se vzduchem o teplotě  $T_p = (26,5 \pm 0,2)^\circ\text{C}$  tak, že jsem teploměr umístil co nejbližší ústí fénu. Naměřil jsem  $T_k = (110,0 \pm 10,0)^\circ\text{C}$ , přičemž teplota velmi kolísala. Jelikož absolutní chyby hodnot se při součtu či rozdílu hodnot sčítají je  $T_k - T_p = (80 \pm 10)^\circ\text{C}$ .

Jelikož pro chyby součinu nebo podílu hodnot se sčítají relativní chyby, je relativní chyba

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta(T_k - T_p)}{T_k - T_p} + \frac{\Delta V}{V} = 0,05 + 0,098573 + 0,125749 + 0,071429 = 0,345751$$

je výsledná hodnota  $c = (1,1 \pm 0,4) \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \text{K}^{-1}$  (hodnotu uvádíme tak, aby chyba byla na jednu platnou cifru, poslední platná cifra hodnoty je řádu platné cifry chyby).

Hodnota je přijatelná vzhledem k hodnotě v tabulkách. Můžeme diskutovat příkon fénu. Rozhodně se u druhé metody nespoteřebuje celý příkon, dodávaný do fénu. To ale neznamená, že získaná hodnota je kvůli tomu větší. To při dané chybě měření nemůžeme rozhodnout.

**Úloha III.Exp ... fyzik hudebníkem**

Změřte součinitel statického tření mezi různými materiály (např. papír a dřevo). Při měření využijte gramofonu.

**Řešení:**

Ve vašich řešeních jste uváděli dvě různé metody pro určení koeficientu smykového tření.

Koeficient smykového tření (dále značeno  $\mu$ ) udává maximální velikost síly, která je reakcí na sílu snažící se změnit pohybový stav daného tělesa.

První metoda je dynamická. Na těleso položené na točící se desce gramofonu působí síla  $F_{\text{od}} = m\omega^2 r$ , kde  $m$  je hmotnost tělesa,  $\omega$  úhlová rychlost otáčení a  $r$  je vzdálenost tělesa

od osy rotace. Proti odstředivé síle působí síla smykového tření  $F_t$ , která je nejvýše rovna maximální třecí síle dané koeficientem smykového tření:

$$F_t \leq F_{t \max} = \mu mg.$$

K odpoutání tělesa od podložky dojde v okamžiku, kdy je odstředivá síla  $F_{od}$  rovna maximální třecí síle  $F_{t \max}$ . Do této doby je vždy  $F_{od} = F_t$ .

Následný způsob měření je jednoduchý: těleso vzdalujeme od osy rotace do okamžiku vyrovnání velikosti síly odstředivé a maximální třecí síly. Z takto zjištěného poloměru  $r$  vypočteme koeficient smykového tření následovně:

$$\mu = \frac{r\omega^2}{g}$$

Druhá metoda je statická, založená na přímém měření velikosti  $F_{t \max}$ , postup je následující:

- 1) Určíme moment  $M$  síly, kterým je kotouč gramofonu roztáčen.
- 2) Těleso položíme na kotouč (jež je v klidu, vzdálenost tělesa od osy  $r$ ), zajistíme jej (držíme jej provázkem, je opřen o nějakou překážku, ...).
- 3) Spustíme motor gramofonu.

Následně mohou nastat dvě situace:

- Disk gramofonu se roztočí: moment smykové třecí síly byl menší než moment  $M$ . Těleso vzdálíme více od osy otáčení.
- Disk se netočí. Moment maximální smykové třecí síly je větší než moment  $M$ . Těleso posuneme blíže do středu desky.

- 4) Motor gramofonu zastavíme.
- 5) Body 3 a 4 opakujeme do doby, dokud jsou nutné změny polohy tělesa pozorovatelné.

Koeficient smykového tření je určen:

$$\mu = \frac{M}{mgr}$$

#### Úloha IV.Exp ... křídový prach

Změřte poloměr zrnka křídového prachu.

*Pomůcka:* Pro velmi jemný prach můžeme měřit dobu pádu prachu na zem a za pomoci Stokesova vzorce pro odpor prostředí můžeme poloměr dopočítat.

#### Řešení:

**Teorie.** Na padající zrnko křídového prachu působí tíhová síla a odporová síla vzduchu. Pokud tvar zrnka budeme považovat za kulový a obtékání zrnka vzduchem bude laminární, můžeme odporovou sílu vypočítat ze Stokesova vzorce  $F_o = 6\pi r\eta v$ , kde  $r$  je poloměr zrnka,  $v$  je jeho rychlost a  $\eta$  je dynamická viskozita vzduchu (pro  $0^\circ\text{C}$  je v tabulkách uvedena hodnota  $\eta = 17,1 \cdot 10^{-6}$  Pa·s). Pohybová rovnice padajícího zrnka má tedy tvar:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho a = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - 6\pi r\eta v,$$

kde  $\rho$  je hustota kříd,  $g$  tíhové zrychlení a  $a$  zrychlení padajícího zrnka. Její integrací (pro počáteční podmínku  $v_0 = 0$ ) dostaneme závislost rychlosti na čase

$$v = \frac{2r^2 \rho g}{9\eta} \left( 1 - e^{-\frac{9\eta}{2r^2 \rho} t} \right). \quad (40)$$

Pokud je výraz v exponentu exponenciely  $-\frac{9\eta}{2r^2\rho}t$  dostatečně malý, pak již po velmi krátkém čase můžeme exponenciálu zanedbat a rychlost pádu bude konstantní (tíhová síla je v rovnováze s odporovou silou)

$$v = \frac{2r^2\rho g}{9\eta}.$$

Padá-li zrnko touto rychlostí z výšky  $h$  a dopadne za čas  $t$ , snadno z předchozího vztahu vyjádříme poloměr zrnka

$$r = \sqrt{\frac{9h\eta}{2\rho g t}}. \quad (41)$$

**Postup a výsledky měření.** K měření jsem použila prach z bílé školní křídly, který jsem získala nastrouháním křídly o papír. Prach jsem nechala padat ze skříně výšky  $h$  a stopkami jsem měřila dobu pádu na podlahu. Naměřené hodnoty jsou v tabulce, statistickým zpracováním dostaneme průměrnou hodnotu s celkovou chybou měření  $t = (2,6 \pm 0,5)$  s.

Výšku skříně jsem změřila pásovým měřidlem  $h = (150,0 \pm 0,5)$  cm. Hustotu křídly jsem určila z tabulek  $\rho = (2200 \pm 400)$  kg·m<sup>-3</sup>, tíhové zrychlení  $g = 9,81$  m·s<sup>-2</sup>. Z (41) vypočítáme poloměr zrnka včetně chyby měření  $r = (4,5 \pm 0,9) \cdot 10^{-5}$  m.

č. m.	$t/s$
1	1,80
2	2,47
3	3,17
4	2,96
5	3,09
6	2,93
7	2,61
8	3,22
9	2,77
10	2,59
11	2,32
12	2,47
13	2,37
14	2,81
15	2,18
16	2,69

**Závěr.** Vidíme, že vzhledem k přesnosti měření můžeme zanedbat, že jsme při výpočtu použili hodnotu dynamické viskozity vzduchu při 0 °C. Měli bychom také ověřit oprávněnost zanedbání členu s exponenciálou v (40). Po dosazení do exponentu dostáváme, že už v čase  $t = 0,2$  s přispívá člen  $e^{-\frac{9\eta}{2r^2\rho}t}$  pouze hodnotou 0,03. Zrnka prachu nebyla stejně velká, na zem nedopadala všechna najednou, ale postupně. Snažila jsem se měřit dobu, ve které dopadlo na zem najednou nejvíce zrněk, takže jsem v podstatě určila poloměr zrněk, která byla v prachu nejvíce zastoupena. Navíc chyba měření je poměrně velká (asi 20 %) a kulový tvar zrněk je značně diskutabilní, takže výsledek měření bychom měli považovat za řádový odhad rozměru zrnka. Největší podíl na chybě měření má měření času a určení hustoty křídly (obě měrou asi 10 %).

*Dodatek — nejčastěji se vyskytující chyby*

Někteří z vás určili hustotu křídly změřením jejich rozměrů a zvážením. Hustota jim vyšla nižší, protože křída v sobě obsahuje vzduch (zkuste si ponořit kousek křídly do vody a uvidíte).

Neměli byste také zapomenout uvést, jaký druh křídly jste při měření použili a jakým způsobem jste připravili prach.

### Úloha V.Exp ... pevnost nitě

Změřte mez pevnosti nitě v tahu. S řešením nám pošlete 1 m dlouhý vzorek vaší nitě.

#### Řešení:

**Teorie.** Pro izotropní materiál je mez pevnosti v tahu definována coby kritické napětí  $\sigma_K$ , při kterém dochází k trvalé deformaci materiálu tahem. Existuje celá složitá teorie, popisující chování látky při působení vnější síly — někteří řešitelé rozvedli na toto téma široké úvahy, což jsem ocenil, zvláště pokud to mělo také co do činění s nitěmi. Nit bohužel není izotropní, ba dokonce ani příliš homogenní (tím míním „stejná“ ve všech bodech měřeného úseku). Mezi pevnosti nitě budeme definovat normálové napětí  $\sigma_N$ , které se v niti nachází v okamžiku,

kdy dochází k trvalé deformaci — praskání nitě, porušení vláken. Toto napětí lze určit jako podíl

$$\sigma_N = \frac{F_K}{S}$$

kde  $F_K$  je velikost kritické síly, která ve zmíněném okamžiku nit napíná v normálovém směru,  $S$  je obsah průřezu nitě v téže okamžiku.  $\sigma_N$  nelze chápat jako mez pevnosti materiálu, z něhož je nit vyrobena. Nit totiž může mít složitou vnitřní strukturu — zpravidla je vyrobena z více paralelních vláken, v lepším případě rovnoběžných a přibližně stejných (v horším případě různých a různě zašmodrchaných — existují i nitě pletené, kde vlákna nejsou rovnocenná a při napínání nitě působí na různá vlákna různé síly).

**Metody.** K měření  $\sigma_N$  je třeba změřit kritickou sílu  $F_K$  a průřez nitě  $S$ . Předpokládejme, že nit má na měřeném úseku konstantní průřez. Na nit budeme působit silou, jejíž velikost budeme pomalu zvyšovat. Změříme tak mez pevnosti nejméně odolného úseku měřené nitě.

Nit lze napínat různými silami. Můžeme nit přivázat ke stropu, na její dolní konec upevnit siloměr a za siloměr ručně tahat ve vhodném směru. Špatným nápadem není ani použití nitě coby závěsu matematického kyvadla; při průchodu rovnovážnou polohou působí na nit největší síla (součet tíhové síly závaží a reakční síly na sílu dostředivou). Osobně jsem se přidržel klasičtějšího řešení — na nit jsem zavěsil láhev, do níž jsem velmi pomalu přiléval vodu. Působící síla byla tedy pouze tíhová.

Dále je třeba změřit průřez nitě  $S$ . To se dá udělat s poměrně velkou odchylkou pravítkem nebo mikrometrem. Nebo lze užít následující postup: do kapaliny v odměrném válci ponoříme větší množství nitě známé délky. Změříme tak objem nitě a z předpokladu konstantního průřezu máme

$$S = \frac{V}{d}, \quad (42)$$

$d$  je délka nitě,  $V$  je objem nitě. Oběma postupy se však měří průřez nitě v nenapjatém stavu. Abychom se vyhnuli problematickému měření napnuté nitě, stanovíme relativní prodloužení  $\varepsilon$  nitě mezi nenapnutým a napnutým (praskajícím) stavem. Ve vztahu (42) pak použijeme délku  $d' = \varepsilon d > d$  místo  $d$ .

**Vlastní měření.** Použil jsem nit, která nebyla pletená. Na nit jsem zavěsil láhev a do lahve jsem pomalu přiléval vodu. Po překročení kritické síly nit praskla. Láhev s vodou jsem následně zvažil na kuchyňské váze. 10 měření je v tabulce 1:

Tabulka 1.

č. m.	$m$ [kg]	$F_k$ [N]	$\Delta F_k$ [N]	$(\Delta F_k)^2$ [N <sup>2</sup> ]
1	1,71	16,8	+2,8	7,84
2	2,08	20,4	-0,8	0,64
3	2,12	20,8	-1,2	1,44
4	2,20	21,6	-2,0	4,00
5	1,84	18,1	+1,5	2,25
6	1,90	18,6	+1,0	1,00
7	2,16	21,2	-1,6	2,56
8	1,78	17,5	+2,1	4,41
9	2,13	20,9	-1,3	1,69
10	2,01	19,7	-0,1	0,01

Systematická chyba měření bude vyžadovat diskusi. Nejprve chyba použitého zařízení — kuchyňské váhy — ta činí 10 g (jeden dílek měřidla je sice 10 g, avšak jistou toleranci vyžaduje též nepřesné vyvažování). Do systematické chyby se započítávají i chyby metody. Metoda má následující chyby: dodávání vody se děje po jistých dávkách, aby byla láhev naplněna v konečném čase. Tyto dávky jsou přibližně 50 g. Měření může ovlivnit setrvačná síla pomalu přilévané vody. Nit si dále „pamatuje,“ pokud byla již jednou na-

máhána, a praská dřív. Celkově tudíž systematickou chybu odhaduji na 0,8 N. Pro výpočet celkové chyby užijeme přibližný vzorec  $s_{\text{celk}} = 3s_{\text{stat}} + s_{\text{syst}}$ . Odtud  $s_{\text{celk}} = 2$  N.



**Měření průřezu.** Průřez nitě jsem měřil ponořením do vody. Odměrný válec měl 1 dílek 0,5 ml. Naměřené objemy a jim odpovídající délky nití jsou v tabulce. Relativní prodloužení jsem změřil  $1/\varepsilon = (0,90 \pm 0,03)$ .

Tabulka 2.

č. m.	$d$ [m]	$d'$ [m]	$V$ [cm <sup>3</sup> ]	$S$ [cm <sup>2</sup> ]	$\Delta S$ [m <sup>2</sup> ]
1	11,4	12,7	$1,50 \cdot 10^{-6}$	$1,2 \cdot 10^{-7}$	$0,0 \cdot 10^{-7}$
2	9,5	10,5	$1,25 \cdot 10^{-6}$	$1,2 \cdot 10^{-7}$	$0,0 \cdot 10^{-7}$
3	10,4	11,5	$1,50 \cdot 10^{-6}$	$1,3 \cdot 10^{-7}$	$-0,1 \cdot 10^{-7}$
4	9,0	10,0	$1,25 \cdot 10^{-6}$	$1,3 \cdot 10^{-7}$	$-0,1 \cdot 10^{-7}$
5	10,0	11,1	$1,25 \cdot 10^{-6}$	$1,1 \cdot 10^{-7}$	$0,1 \cdot 10^{-7}$

Systematická chyba je značná — je to způsobeno nepatrným objemem nitě i při značné délce. Museli bychom nořit kilometry nití, aby byly výsledky přesnější. Chyba měřidla (válece) je 0,25 ml. Chyba při měření délky nitě byla 5 cm (měřeno metrem). Při měření objemu byl navíc problém zbavit se všech vzduchových bublin, které se v niti vytrvale držely. Odtud plyne systematická chyba cca 20%, tj.  $s_{\text{sys}} = 0,2 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$  a celková chyba  $s_{\text{celk}} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$ .

Průměr nitě jsem zkusil též měřit přímo — namotáním více nití těsně vedle sebe na pravítko. Dospěl jsem k hodnotě poloměru  $r = 0,2 \text{ mm}$ , což odpovídá průřezu  $S = 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$ , přičemž statistická chyba činí 5% a systematická chyba není známa (nelze určit, do jaké míry jsou nitě těsně u sebe).

**Závěr.** Mez pevnosti určíme jako  $\sigma_N = F_K/S$ , po dosazení naměřených hodnot

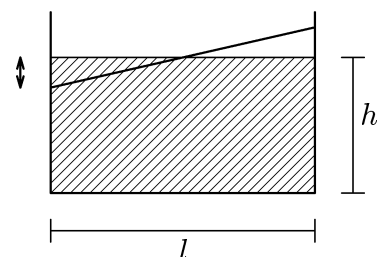
$$\sigma_N = (160 \pm 80) \text{ MPa} .$$

**Diskuse.** Přestože mnoho z vás neměřilo lépe, vycházely vám odchylky optimističtěji. Zpravidla jste si dost věřili, co se týče systematické chyby. Největší chyba vznikla jistě měřením průřezu nitě. Mohli bychom ji snížit např. tak, že vezmeme větší a užší odměrný válec a do něj nácpeme několik kilogramů nitě. Pak ale budeme mít nejspíš problémy s bublinami vzduchu. Při měření se potvrdily obavy z nehomogenity nitě, je tedy otázkou, do jaké míry má smysl počítat statistické odchylky při měření kritické síly. Nit se trhá v různých místech při jiné zátěži, navíc lze pozorovat, že při delším zatížení nit praskne, aniž by bylo dosaženo síly, při které praskla, když jsme přilévali vodu rychleji. Pokus o vysvětlení: nit je složena z více vláken zamotaných okolo sebe. Po zavěšení závaží se některá vlákna napínají, vnitřní struktura se mění (pozorujeme např. rotaci nitě) a mění se i rozložení tíhové síly mezi jednotlivá vlákna. Při těchto změnách se může stát, že nosných nití je málo. Měření vadí i jiné věci, např. vlhkost apod., pokud však nit nepolijeme sami, nepovažují tyto jevy za majorantní.

*Filosofický závěr.* Přesností naše měření neoplývá. Zjistili jsme však, že kolem chování nití lze nadělat spoustu teorie, která rozhodně nebude jednoduchá. Nicméně teprve s dobrým fyzikálním modelem budeme znát správnou interpretaci výsledků měření.

### Úloha VI.Exp ... akvárium

Najděte si akvárium, nebo podobnou nepropustnou nádobu kvádřového tvaru a zčásti ji naplňte vodou do výšky  $h$ . Nádobou rychle pohněte ve směru jedné ze stěn, aby hladina začala kmitat tak, jak je to naznačeno na obr. 45. Změřte frekvenci, s kterou hladina kmitá, proveďte pokud možno více měření pro různé hodnoty  $h$  a  $l$  a výsledky se pokuste interpretovat (vymyslete fyzikální model). Omezte se na malé amplitudy kmitů.



Obr.45

**Řešení:**

Nejprve se budeme věnovat samotnému měření:

Klíčem k úspěchu byl dostatek vhodných nádob. Jak se později ukázalo, perioda roste s délkou  $l$ , a tak se pohodlněji měřily dlouhé nádoby, zatímco měření v nádobách kratších než 10 cm bylo velmi problematické. Pro některé nádoby tak bylo možné měřit kmitání pro dva kolmé směry. Pro malé  $h$  byl problém zajistit vhodným počátečním impulsem, aby se hladina kývala skutečně jenom tak, jak potřebujeme. Pokud chceme zjistit závislost frekvence na  $h$  i  $l$ , musíme provést pokud možno co nejvíce měření pro různé dvojice hodnot  $h$  a  $l$ , třeba i na úkor přesnosti jednotlivých měření. Je účelnější změřit desetkrát různé dvojice  $h$  a  $l$ , než desetkrát jednu dvojici a tu pak zprůměrovat.

Čas bylo žádoucí měřit stopkami s přesností alespoň 0,1 s. Měřil jsem vždy dobu dvaceti period —  $20T$ . Při počítání kmitů bylo možné sledovat přímo pohyb vlny po hladině nebo (což jsem činil já) pozorovat odrazy okolních předmětů (okraje nádoby, sluníčka...) na hladině. Několikanásobným změřením  $20T$  pro tutéž kombinaci  $l$  a  $h$  jsem odhadl chybu určení  $20T$  na 0,2 s, což dává průměrně relativní chybu přibližně 1%. Délky  $l$  a  $h$  jsem měřil skládacím metrem — chyba 2 mm. Naměřené hodnoty  $l$ ,  $h$  a  $20T$  jsou v tabulce 3.

Tabulka 3

20T/s	h/cm											
l/cm	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	9,0	9,0	10,0
14,1	12,29	11,30	10,19	9,90	9,51							
23,5	21,38	18,63	17,59									
27,5		21,75	19,57	18,29	17,61	16,61	15,92					
58,5								31,91	29,13	27,32	26,29	25,07

V tabulce 4 jsou odpovídající hodnoty frekvence.

Tabulka 4

f/Hz	h/cm											
l/cm	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	9,0	9,0	10,0
14,1	1,63	1,77	1,96	2,02	2,10							
23,5	0,94	1,07	1,14									
27,5		0,92	1,02	1,09	1,14	1,20	1,26					
58,5								0,627	0,687	0,732	0,761	0,798

Chyba určení frekvence je opět přibližně 1%.

Z tabulek vidíme, že s rostoucím  $h$  a s klesajícím  $l$  roste frekvence. Pro změřené dvojice hodnot při konstantním  $h$  můžeme usoudit, že  $f$  je nepřímo úměrné  $l$  a pro konstantní  $l$  zjistíme, že  $f$  je přímo úměrné  $\sqrt{h}$ . Tedy platí:  $f \sim \sqrt{h}/l$ .

Nyní je naším úkolem vymyslet vhodný fyzikální model popisující daný jev. Podařilo se to například Lukáši Poulovi a Janu Prokleškovi:

Předpokládali, že pro rychlost vlny v kapalině  $v$  platí vztah:

$$v = \sqrt{gh}$$

Dokázat platnost tohoto vztahu však není jednoduché. Za dobu jedné periody urazí vlna vzdálenost  $2l$ , z toho nám vyjde frekvence

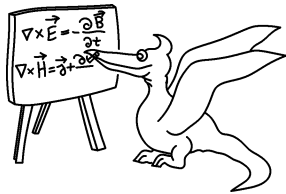
$$f = \frac{\sqrt{gh}}{2l} \quad (43)$$

což odpovídá v rámci chyb měření naměřeným hodnotám.

Vymysleli jste i jiné modely: Na vodu v nádobě lze například pohlížet jako na fyzické kyvadlo, které se kývá podél nehybné osy ležící uprostřed nádoby na hladině. Jinak na to šel Karel Kolář, který řešil problém přímo ze zákona zachování energie (součet kinetické a potenciální energie vody zůstává konstantní). Po několika snadných integracích a derivacích vyšlo

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{30gh}{3l^2 + 10h^2}} \quad (44)$$

Porovnání takovýchto vztahů se skutečností je vždy otázkou dostatečného počtu měření. Nikdo z vás (ani já) neprovedl tolik měření, že by jej to opravňovalo rozhodnout, který ze vzorců (43) nebo (44) je výstižnější. Já jsem provedl toto: Všechna měření, která jste zaslali (kromě těch méně důvěryhodných) jsem zanesl do počítače a sečetl jsem kvadráty odchylek naměřených hodnot od hodnot dopočtených podle vztahu (43) (respektive (44)). Příznivější výsledky dává (44), ale rozdíl od jednoduchého vztahu (43) je poměrně malý. Chcete-li, můžete si soubor s naměřenými hodnotami vašich kolegů stáhnout na adrese <http://www.mff.cuni.cz/iso/news/fks/rocnik11/exp.xls> a ještě si s tím pohrát.



## Seriál o kvantové fyzice

V letošním seriálu na pokračování jsme se věnovali moderní fyzice 20. století, zvláště pak **kvantové teorii**. Kvantovka je velice rozsáhlá disciplína a k jejímu skutečnému zvládnutí je potřeba znát partie vyšší matematiky. Zde nebude dostatek prostoru k výkladu matematického formalismu kvantové teorie, a tak si alespoň objasníme některé základní pojmy a nejjednodušší výsledky. Abychom se vůbec dostali k zajímavým kvantovým efektům, bude první kapitola poněkud stručnější. Když nebudete něčemu rozumět, nebojte se zeptat vašeho učitele fyziky nebo si ve škole půjčte vhodnou literaturu. Právě tím se naučíte mnohem víc, než vám může dát jakýkoli korespondenční seminář. Ten by měl být pro vás spíše motivací k vlastnímu studiu.

### Kapitola 1: Experimentální poznatky a teoretické hypotézy

Ještě než začneme, rádi bychom pro představu připomněli, kdy a v jakém pořadí nejdůležitější teze kvantové teorie vznikaly. Na přelomu století se podařilo Planckovi na základě kvantové hypotézy objasnit *spektrum záření černého tělesa* (1900) a o pět let později vysvětlil Einstein pomocí představy o fotonech *fotoelektrický jev* (1905). První *kvantový model atomu* vytvořil Niels Bohr (1913). Průlomem v představách o mikrosvětě byla *de Broglieho hypotéza* (1924), následována Heisenbergovou *kvantovou mechanikou* (1925) a Schrödingerovou *vlnovou mechanikou* (1926). Obě tyto konkurenční mechaniky se zdály být správné a vznikla tak otázka, která z nich je ta pravá. Nakonec se ukázalo, že jsou vlastně ekvivalentní.

**Planckova konstanta:** V Planckově zákoně záření černého tělesa se objevila nová univerzální konstanta, známá jako Planckova konstanta  $h = 6,62608 \cdot 10^{-34}$  J·s. V dnešní době se však používá častěji tzv. redukovaná Planckova konstanta  $\hbar = h/2\pi$ , která mnohé vztahy zbaví faktoru  $1/2\pi$ . Číselně  $\hbar = 1,054573 \cdot 10^{-34}$  J·s.

**Fotoefekt:** Fotoelektrický jev byl objeven na konci minulého století. Jedná se o děj, při kterém jsou z kovu ozářeného světlem emitovány elektrony. Experimentálně bylo zjištěno, že spektrum energií vyzařovaných elektronů nezávisí na intenzitě, ale na vlnové délce dopadajícího světla. Tento fakt je v rozporu s klasickou fyzikou a vysvětlil jej teprve Einstein zavedením předpokladu, že světlo je vyzařováno a pohlcováno po částech (kvantech), které nazval fotony a přisoudil jim energii  $E = h\nu = \hbar\omega$ , kde  $\nu$  je frekvence a  $\omega$  úhlová frekvence světla. Každý elektron je emitován jedním fotonem, jehož energie se rozdělí na kinetickou energii elektronu ( $mv^2/2$ ) a tzv. výstupní práci z kovu ( $W_v$ ), která je potřebná pro překonání rozdílu potenciální energie elektronu ve vakuu a v kovu:  $h\nu = mv^2/2 + W_v$ .

**De Broglieho hypotéza:** Bylo již delší dobu známo, že elektromagnetické vlny mají vlastnosti částic (fotonů) o energii  $E = h\nu$  a hybnosti  $p = h\nu/c$ . Louise de Broglieho napadlo vyjádření vlnové délky fotonu  $\lambda = h/p$  zobecnit na všechny částice. Prohlásil, že každá částice s hybností  $p$  má vlastnosti vlny s odpovídající vlnovou délkou, například že může interferovat, což bylo později ověřeno i experimentálně (1927).

**Bohrův model atomu vodíku:** Elektrická přitažlivá síla mezi elektronem a protonem  $F_e = e^2/4\pi\epsilon_0 r^2$  má podobné vlastnosti jako gravitační síla, tj. ubývá s druhou mocninou vzdálenosti. Pokud chceme odhadnout chování elektronu (který je mnohem lehčí než proton) v atomu vodíku, nabízí se analogie s pohybem planet ve Sluneční soustavě. Pokud elektrony

obíhají po kruhových orbitách, musí se dostředivá síla rovnat síle elektrické,

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (\text{S.1})$$

Energie elektronu je součtem kinetické a potenciální energie v poli jádra,  $E = E_{kin} + E_{pot}$ ,  $E = mv^2/2 - e^2/4\pi\epsilon_0 r$ . Dosadíme-li sem ze vztahu (S.1) za rychlost  $v$ , máme

$$E = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}. \quad (\text{S.2})$$

Až sem by klasická fyzika fungovala, pokud však z vazebné energie vodíku  $E = -13,6 \text{ eV}$  vypočteme poloměr dráhy elektronu  $r = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$  a dostředivé zrychlení, měl by elektron podle klasické elektrodynamiky extrémně silně zářit, rychle ztrácet energii a během  $10^{-16} \text{ s}$  spadnout do jádra. Bohrův model se s tímto problémem vypořádává hypotézou, podle které jsou povolené pouze některé dráhy, přičemž elektron září jedině v okamžiku, kdy přechází z jedné na druhou. Jak se ukázalo po vyslovení de Broglieho hypotézy, jsou to právě orbity, na jejichž obvod se vejde celý počet vlnových délek elektronu:  $n\lambda = 2\pi r$ ,  $n = 1, 2, 3 \dots$

Dostáváme tedy další vztah mezi  $r$  a  $v$ ,  $nh/m_e v = 2\pi r$ . Sloučením této rovnice s rovnicí (S.1) získáme možné poloměry drah a následně dosazením za  $r$  do (S.2) i příslušné energie

$$r = \frac{\pi\epsilon_0 h^2 n^2}{me^2}, \quad E = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}. \quad (\text{S.3})$$

Pokud elektron přeskóčí z vyšší hladiny  $n_1$  na nižší hladinu  $n_2$ , vyzáří foton o energii

$$E_{n_1 n_2} = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right). \quad (\text{S.4})$$

Pokud elektron naopak foton o této energii pohltí, může přeskóčit z energetické hladiny  $n_2$  na  $n_1$ .

Bohrův model vysvětlil, proč je spektrum vodíku diskrétní a dobře popsal jeho základní rysy. Má ale také velké nedostatky: špatně předpovídá prostorové rozložení elektronů v základním stavu atomu vodíku, které je ve skutečnosti sféricky symetrické, nedá se aplikovat na složitější atomy a nedokáže vysvětlit jejich chemické vlastnosti. Jedině pro nejnižší hladiny těžších atomů dává při započtení správného efektivního náboje jádra energie, které alespoň trochu souhlasí s experimentem. Přestože je dnes Bohrův model dávno překonán, není na škodu věnovat mu trochu pozornosti, neboť zůstává pojítkem mezi klasickou a kvantovou fyzikou.

### Úloha S.I ... rentgenové záření

a) Určete nejmenší vlnovou délku záření rentgenky, v níž jsou elektrony urychlovány napětím 20 kV.

b) Z jakého kovu byl zhotoven terčík, na nějž dopadaly v rentgence elektrony, pokud spektrální čára  $K_\alpha$  ve spektru rentgenového záření měla vlnovou délku  $(155 \pm 3) \cdot 10^{-12} \text{ m}$ ?

*Návod:* Záření rentgenky je dvojího druhu.

Pokud elektrickým polem urychlený elektron při dopadu na terčík vyzáří část své kinetické energie v podobě fotonu, vzniká tzv. brzdné záření, jehož spektrum je spojité.

Pokud dopadající elektron vyrazí z atomu terčíku elektron z jedné z nejnižších elektronových hladin ( $n_2$ ), přeskakuje za malý okamžik na jeho místo nějaký elektron z vyšší hladiny ( $n_1$ ), přičemž vyzáří foton o energii odpovídající tomuto přechodu.  $K_\alpha$  je název spektrální čáry, která vznikne při přeskoku z druhé hladiny ( $n_1 = 2$ ) na první ( $n_2 = 1$ ). V tomto případě

však cítí přeskakující elektron efektivní náboj jádra  $(Z - 1)e$ , protože je jádro vůči němu stíněno jedním elektronem, který na nejnižší energetické hladině zbyl.

### Řešení:

a) Nejmenší možnou vlnovou délku bude mít vyzářený foton v případě, že mu elektron předá celou svou kinetickou energii  $E = eU$ , kterou získal při urychlení v elektrostatickém poli při napětí  $U$ . Tato mezní vlnová délka je tedy rovna

$$\lambda_{mez} = \frac{hc}{eU},$$

číselně  $62 \cdot 10^{-12} \text{m}$ .

b) Energie odpovídající přeskočení elektronu z druhé slupky na první ve víceelektronovém atomu je v Bohrově přiblížení

$$E_{21} = \frac{m(Z - 1)^2 e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right).$$

Tento vztah dostaneme jednoduše ze vztahu pro spektrum vodíku záměnou  $e^2 \rightarrow (Z - 1)e^2$ , protože elektrostatická síla mezi elektronem a odstíněným jádrem je nyní  $(Z - 1)$ -krát větší než mezi elektronem a protonem. Z toho, že energie emitovaného fotonu  $E = h\nu = hc/\lambda$  má být rovna právě  $E_{21}$ , vyplývá po jednoduché úpravě

$$Z = 1 + \sqrt{\frac{32h^3 c \epsilon_0^2}{3m e^4 \lambda}},$$

číselně  $29,0 \pm 0,3$ . Terčák v rentgenové trubici byl vyroben z mědi.

## Kapitola 2: Heisenbergovy relace neurčitosti

### Relace neurčitosti.

V kvantové teorii není měření zdaleka tak triviální záležitostí jako v klasické fyzice. V ní bylo možno hodnotu libovolné veličiny zjistit (alespoň v principu) dostatečně šetrným způsobem, tj. tak, aby bylo těleso ovlivněno procesem měření tak málo, jak jen budeme chtít. Zaměříme-li se na studium mikrosvěta, zjistíme, že míra vlivu měření na náš kvantově-mechanický systém nemůže být nikdy libovolně malá a že existují veličiny, jejichž hodnoty nemůžeme nikdy znát zároveň přesně.

Například polohu elektronu můžeme zjistit tak, že si na něj posvítíme. Přesněji řečeno, vyšleme foton, který se od něj odrazí, a odražený foton poté nějakým způsobem zachytíme. Například fotografickou deskou. Proces detekce ponechme stranou a podívejme se, co se mezitím stalo s naším elektronem. Protože do něj narazil foton o hybnosti  $p = h/\lambda$ , můžeme očekávat, že se jeho hybnost změnila o hodnotu řádově srovnatelnou

$$\Delta p_x \simeq \frac{h}{\lambda}. \quad (\text{S.5})$$

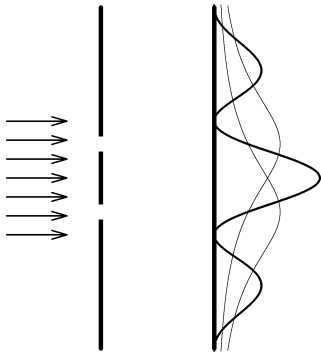
Přesnost  $\Delta x$ , s jakou budeme znát polohu elektronu je zase řádově srovnatelná s vlnovou délkou použitého světla. Dospíváme tedy ke vztahu

$$\Delta x \Delta p_x \simeq h, \quad (\text{S.6})$$

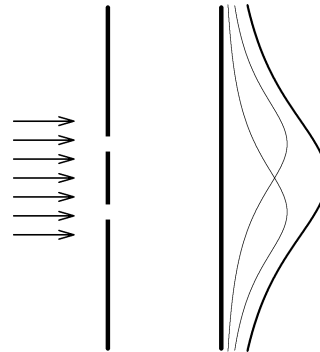
který se nazývá relací neurčitosti mezi polohou a hybností. Pokud bychom chtěli znát polohu elektronu s velkou přesností, museli bychom použít fotony s malou vlnovou délkou, a tím i s velkou hybností, které podstatně ovlivní hybnost elektronu. Poslední odhad neplatí jen pro měření, které jsme uvažovali, ale má obecnou platnost.

**Dvojštěrbinový experiment.**

Jak již bylo řečeno v první kapitole, má každá částice o hybnosti  $p$  vlastnosti vlny s vlnovou délkou  $\lambda = h/p$ . Pokud tato hybnost není určena přesně, nemá samozřejmě ani vlnovou délku zcela přesnou. Tyto vlny mohou interferovat stejně jako každé jiné vlnění. Nejlépe je to vidět na známém dvojštěrbinovém experimentu. Představte si, že máme přepážku, ve které jsou vyříznuty blízko sebe dvě úzké štěrbin. Na jednu stranu umístíme zdroj monochromatického světla, například laser, kterým svítíme na přepážku, a na druhou dáme do velké vzdálenosti rovnoběžně s přepážkou stínítko. Na něm se pak objeví známé interferenční proužky.



Obr. 46



Obr. 47

Z hlediska vlnové teorie světla má tento výsledek jasné vysvětlení. Na přepážku dopadá světelná vlnoplocha, jejíž každý bod se podle Huygensova principu stává zdrojem dalších elementárních vlnoploch. Obě štěrbin se tedy chovají jako dva koherentní zdroje světla a vlny z nich vycházející budou za přepážkou interferovat. V místech na stínítku, kde se obě vlny setkají ve fázi, vzniknou světlé proužky a místa, kde budou tyto vlny v protifázi, zůstanou neosvětlena (obr.46). V případě, že jednu ze štěrbin zakryjeme, zaniknou interferenční proužky a na stínítku se objeví jedna rozmazaná spojitá skvrna, protože světlo dopadající na stínítko pochází z jediného místa na přepážce.

Z hlediska částicové teorie by pokus vypadal jinak. Kdybychom nechali otevřenou pouze jednu štěrbinu, dopadaly by částice světla do okolí místa na stínítku, které leží na přímce laser-štěrbina. Protože se při interakci s přepážkou během průchodu štěrbinou mohou trochu od původního směru odchýlit, nesešly by se všechny v jednom bodě, ale vytvořily by stejnou skvrnu, jakou předpovídá vlnová teorie světla. Kdybychom nyní otevřeli i druhou štěrbinu, prošla by každá částice buď jednou nebo druhou z nich, takže by se pouze zvýšil počet částic, které by prošly přepážkou. Obraz na stínítku by se příliš nezměnil, byl by jen intenzivnější (obr.47). Žádné interferenční proužky by nevznikaly. To se však nepozoruje.

Jsou známy experimenty, kdy musíme světlo považovat za proud fotonů, což dokazuje například fotoelektrický jev. Vysvětlení dvojštěrbinového experimentu z hlediska částicové teorie je jednoduché, ale přiči se trochu naší zkušenosti, kterou máme ze světa makroskopických těles. Nejjednodušší vysvětlení, že se navzájem ovlivňují částice, z nichž jedna prošla první štěrbinou a druhá druhou, není správné, protože ke vzniku proužků dochází i v případě, že ze zdroje vysíláme částice jednu po druhé. Na částici mají tedy při jejím pohybu vliv obě štěrbin najednou, to znamená, že při průchodu dvojštěrbinou neměla částice určitou polohu. To je přesně v souladu s relacemi neurčitosti. Částice ani nemohla mít určitou polohu, protože jsme při pokusu poměrně dobře specifikovali její hybnost, když jsme řekli, že pochází z monochromatického zdroje a že letí směrem k dvojštěrbině. S trochou nadsázky to můžeme vyjádřit tak, že částice proletěla oběma otvory najednou a interferovala sama se sebou.

Zajímavé je, že podobný výsledek dostaneme i v případě, že zmíněnými částicemi nejsou fotony, ale třeba elektrony. Tento pokus je více než výmluvným potvrzením de Broglieho hypotézy, podle které má v mikrosvětě vlnové vlastnosti každá částice.

Zatímco předcházející odvození relací neurčitosti umožňovalo i takovou interpretaci, že částice sice v každém okamžiku má určitou polohu i hybnost a že je pouze nejsme schopni současně změřit, pokus s průchodem částic dvojštěrbínou ukázal, že částice ani v principu určitou polohu a hybnost nikdy zároveň nemá.

Pro úplnost ještě dodejme, že přesné znění relací neurčitosti (S.6), korektně odvozené v kvantové teorii, je

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (\text{S.7})$$

kde symbol  $\Delta$  znamená střední kvadratickou odchylku příslušné veličiny.

### Úloha S. II ... *relace neurčitosti*

a) Před objevem neutronu existovala hypotéza, že jádro s atomovým číslem  $Z$  a hmotnostním číslem  $A$  se skládá z  $A$  protonů a  $A - Z$  elektronů. Odhadněte řádově, jakou kinetickou energii by měl elektron, jehož neurčitost polohy by byla srovnatelná s velikostí jádra helia. Jaké důsledky má tento odhad pro zmíněnou hypotézu? Pokud se částice pohybuje rychlostí srovnatelnou s rychlostí světla, nelze již použít klasický vztah pro kinetickou energii  $E_{\text{kin}} = p^2/2m$ . Je třeba vzít relativistický vzorec

$$E_{\text{kin}} = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2, \quad (\text{S.8})$$

kde  $m_0$  je klidová hmotnost částice.

b) Uvažujme výše popsany dvojštěrbinový experiment s elektrony. Vzdálenost šterbin je  $b = 0,3$  mm a vzdálenost stínítka od přepážky  $l = 1$  m. Zjistěte, jakou rychlost musí mít elektrony, aby vzdálenost dvou sousedních interferenčních minim na stínítku byla právě  $d = 0,2$  mm.

c) Představte si, že místo dvou šterbin uděláme do přepážky pouze jednu. Po průchodu touto šterbinou se fotony odchyľují od původního směru, takže na stínítku uvidíme místo ostrého obrazu šterbiny rozmazanou světlu skvrnu. Vysvětlete tento jev na základě relací neurčitosti.

### Řešení:

a) Neurčitosti polohy rovné poloměru jádra helia  $r$  odpovídá minimální neurčitost hybnosti

$$\Delta p_{\text{min}} = \frac{\hbar}{2r}.$$

Protože má být elektron v jádře vázán, můžeme očekávat, že typická hodnota velikosti hybnosti elektronu bude s  $\Delta p_{\text{min}}$  řádově srovnatelná

$$p \approx \Delta p_{\text{min}}.$$

Použijeme-li nyní relativistický vzorec pro kinetickou energii, dostaneme výsledek

$$E_{\text{kin}} = \sqrt{\frac{\hbar^2 c^2}{4r^2} + m_0^2 c^4} - m_0 c^2.$$

Po dosazení číselných hodnot  $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg a  $d \approx 1,6 \cdot 10^{-15}$  m vychází kinetická energie elektronu minimálně řádově  $1,0 \cdot 10^{-11}$  J neboli 62 MeV, což je mnohonásobně více než jeho klidová energie ( $mc^2 = 0,51$  MeV). Tak rychlý elektron by slabá ani elektromagnetická interakce nebyly schopny udržet, a protože elektron silně neinteraguje, vyletěl by



z jádra. (Obhájit korektnost všech těchto úvah by ale nebylo jednoduché, protože tak silně relativistický systém nemůže ve skutečnosti kvantová mechanika popsat a bylo by třeba užít kvantovou teorii pole, která uvažuje i procesy vzniku a zániku částic.) Hypotéza ale vznikla v době, kdy ještě nebyl znám charakter jaderných sil, a byla vyvrácena zcela jiným argumentem. Experimentálně se zjistilo, že jádro dusíku  ${}^{14}_7N$ , má celočíselný spin, což by nebylo možné, kdyby se skládalo ze čtrnácti protonů a sedmi elektronů, které mají všechny spin  $1/2$ .

b) Použijeme elementární vztah pro úhlovou vzdálenost sousedních interferenčních minim  $\Delta\alpha$ , známý z vlnové optiky

$$b\Delta\alpha = \lambda, \quad \Delta\alpha = \frac{d}{l},$$

který platí pro  $d \ll l$ . Potom není obtížné s pomocí de Broglieho hypotézy dospět k výrazu pro rychlost elektronů

$$v = \frac{p}{m} = \frac{h}{m\lambda} = \frac{hl}{mbd}.$$

Číselně vychází  $v = 12 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ .

c) Vysvětlení difrakce světla pomocí relací neurčitosti je jednoduché. Předpokládejme, že přepážka leží v rovině  $x$ - $y$  a že štěrbina je orientována souhlasně s osou  $y$ , takže má ve směru osy  $x$  průměr  $d$ . Ve směru osy  $z$  vyšleme k přepážce foton s hybností  $p$ . Když foton přepážkou prochází, je lokalizován v oblasti štěrbině ( $\Delta x \approx d$ ) a získá tím neurčitost hybnosti řádově  $\Delta p_x \approx h/d$ . Bude-li jeho původní hybnost dostatečně velká, odkloní se typicky o úhel

$$\alpha = \frac{\Delta p_x}{p} = \frac{h}{pd} = \frac{\lambda}{d},$$

což je ve úplném souhlasu s předpovědí vlnové optiky. Je to ale trochu náhoda, protože kdybychom použili jiný odhad, např.  $\Delta p_x \approx \hbar/d$ , dostali bychom na pravé straně u vlnové délky navíc určitý konstantní faktor, ve zmíněném případě  $1/2\pi$ . To ale nic nemění na správnosti řádového odhadu úhlu  $\alpha$ .

### Kapitola 3: Popis stavu v kvantové teorii

**Vlnová funkce.** V minulé kapitole seriálu jsme zjistili, že žádná částice z mikrosvěta nemá nikdy zcela přesně určenou polohu, pokud známe alespoň trochu její hybnost. Dokonce jsme viděli, že může projít dvěma otvory v přepážce zároveň. Kvantově mechanický systém, který nazýváme částicí, není tím, co jsme si dříve pod pojmem částice představovali. Částice se chová spíše jako malý obláček s rozmazaným okrajem než jako jeden hmotný bod.

Klasická představa trajektorie částice je zcela neudržitelná. Částice se běžně vyskytují ve stavech, v nichž principiálně nelze předpovědět, kde částici objevíme, pokud budeme měřit její polohu. Jediné, co můžeme podle kvantové mechaniky určit, jsou pravděpodobnosti toho, že částici v různých místech nalezneme.

Je tedy potřeba najít jiný způsob, jak popsat stav částice. Vhodným matematickým nástrojem se ukázal být pojem vlnové funkce. Jedná se o spojitou komplexní funkci tří reálných souřadnic  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , definovanou v celém prostoru a často označovanou  $\psi(\mathbf{r})$ . Sama vlnová funkce není přímo měřitelnou veličinou. S výsledky měření ale můžeme konfrontovat druhou mocninu její absolutní hodnoty, která vyjadřuje hustotu pravděpodobnosti  $\rho(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2$ , že se částice v daném místě nachází. Jinými slovy, pravděpodobnost toho, že při měření polohy nalezneme částici v oblasti  $d\Omega$  o malém objemu  $dV$  v okolí bodu  $\mathbf{r}$  bude

$$dP = \rho(\mathbf{r})dV = |\psi(\mathbf{r})|^2 dV = \psi(\mathbf{r})\psi^*(\mathbf{r})dV,$$

kde hvězdička znamená komplexní sdružení. Celkovou pravděpodobnost, že se částice nachází v oblasti  $\Omega$ , dostaneme integrací hustoty pravděpodobnosti přes tuto oblast

$$P_{\Omega} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) dV = \int_{\Omega} |\psi(\mathbf{r})|^2 dV = \int_{\Omega} \psi(\mathbf{r}) \psi^*(\mathbf{r}) dV.$$

Pokud je těžké výše uvedený integrál spočítat, můžeme pravděpodobnost alespoň odhadnout. Horní odhad dostaneme například tak, že nalezneme maximum funkce  $\rho(\mathbf{r})$  v oblasti  $\Omega$  a na jejích hranicích a vynásobíme ho celkovým objemem oblasti  $V$ , dolní odhad pak získáme obdobně pomocí minima. Integrál lze odhadnout i přesněji, rozdělíme-li oblast  $\Omega$  na více částí a v každé z nich aplikujeme tento postup zvlášť.

Někdy bývá výhodné pracovat i s takovými vlnovými funkcemi, pro něž  $|\psi(\mathbf{r})|^2$  nevyjadřuje přímo hustotu pravděpodobnosti, ale je jí pouze úměrné. V takovém případě musíme  $|\psi(\mathbf{r})|^2$  vydělit normalizační konstantou  $N$

$$N = \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\mathbf{r})|^2 dV, \quad \rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{N} |\psi(\mathbf{r})|^2, \quad (\text{S.9})$$

aby pravděpodobnost, že se částice někde nachází, byla rovna jedné. Konstanta  $N$  musí být pro každou přípustnou vlnovou funkci konečná a nenulová, jinak by takto určená hustota pravděpodobnosti neměla smysl. Jestliže připouštíme i takovéto nenormované vlnové funkce, pak jednomu stavu systému neodpovídá jen jedna možná vlnová funkce, ale celá třída funkcí, které se vzájemně liší pronásobením nenulovou komplexní konstantou, protože všechny funkce z této třídy dávají stejnou hustotu pravděpodobnosti. Vlnová funkce obsahuje veškerou informaci o systému, a pokud ji máme zadanou, můžeme předpovědět pravděpodobnosti naměření jednotlivých možných hodnot libovolné veličiny.

**Princip superpozice.** Jedním z nejzákladnějších principů kvantové teorie je tzv. princip superpozice, který říká, že pokud se systém může nacházet ve stavu popsaném vlnovými funkcemi  $\phi$  nebo  $\psi$ , pak se může nacházet i ve stavu, kterému přísluší jejich lineární kombinace  $a\phi + b\psi$ , kde  $a$  a  $b$  jsou komplexní čísla. Takovou vlnovou funkci pak nazýváme superpozicí funkcí  $\phi$  a  $\psi$ . Právě díky principu superpozice mohou vlny, které podle de Broglieho hypotézy přísluší každé částici, vzájemně interferovat.

**Vícečásticová vlnová funkce.** Nyní se zabývejme otázkou, jak pojem vlnové funkce zobecnit na systém více než jedné částice. Asi první, co by člověka napadlo, je zavést pro každou částici jednu vlnovou funkci. To ale není nejlepší řešení, protože v takovém případě by nebylo možno popsat systémy, v nichž jednotlivé částice mezi sebou interagují. Vezměme si například atom vodíku. Pokud by každé částici odpovídala jedna pevná vlnová funkce, nezávisela by vůbec poloha elektronu na tom, kde se v dané chvíli nachází proton. Přesněji řečeno, výsledky měření polohy protonu a elektronu by nebyly vůbec korelovány, což neodpovídá naší zkušenosti, protože elektron ve vodíku se vyskytuje vždy v blízkosti protonu (aby to byl atom).

Ukazuje se, že vhodným zobecněním vlnové funkce na případ  $n$  částic je jedna komplexní funkce  $3n$  reálných souřadnic  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n)$ . Je třeba zdůraznit, že vlna, popsaná touto funkcí, se nešíří v třírozměrném prostoru, ale v  $3n$ -rozměrném prostoru, jehož body mají souřadnice  $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n)$ . Jestliže mezi sebou částice neinteragují, závisí vlnová funkce odděleně na proměnných odpovídajících různým částicím:

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) = \psi_1(\mathbf{r}_1) \psi_2(\mathbf{r}_2) \dots \psi_n(\mathbf{r}_n).$$

V tomto případě budeme hovořit o tom, že první částice je ve stavu  $\psi_1(\mathbf{r}_1)$ , druhá ve stavu  $\psi_2(\mathbf{r}_2)$  a tak dále.

**Úloha S.III ... vlnové funkce**

a) V kvantové mechanice má smysl řešit i jednorozměrné úlohy, to znamená uvažovat částice, které se mohou pohybovat pouze ve směru osy  $x$  a jejichž vlnová funkce  $\psi(x)$  závisí pouze na  $x$ . Podívejme se na nejjednodušší z nich, na částici v „nekonečně hluboké potenciálové jámě“. Tím máme na mysli částici, která se nemůže vyskytovat jinde, než v oblasti  $x \in (0, L)$ , takže její vlnová funkce je vně této „jámy“ o šířce  $L$  nulová. Uvnitř potenciálové jámy se částice může pohybovat zcela volně, protože na ni nepůsobí žádné síly. Jinak řečeno, uvnitř nekonečné potenciálové jámy má částice potenciální energii nulovou a vně nekonečnou. Vaším úkolem je napsat vlnové funkce odpovídající všem možným stavům systému, víte-li, že každá vlnová funkce této částice je v intervalu  $\langle 0, L \rangle$  harmonická (tj. ve tvaru  $c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx)$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ ) a na jeho krajích nulová. S pomocí faktu, že perioda této harmonické funkce je rovna de Broglieho vlnové délce, určete všechny možné energie, které částice může mít. Nakonec se ještě pokuste získané vlnové funkce nanormovat.

b) Vypočítejte, s jakou pravděpodobností se elektron nachází v jádře iontu  $\text{He}^+$ , když je ve stavu  $1s$ , kterému odpovídá normovaná vlnová funkce

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{Z^3}{\pi a_0^3}} e^{-Zr/a_0}, \quad r = |\mathbf{r}|,$$

kde  $Z$  je protonové číslo helia a  $a_0$  Bohrov poloměr atomu vodíku. Pokud tuto pravděpodobnost neumíte vypočítat přesně, pokuste se ji odhadnout seshora i zezdola.

c) Napište prostorovou závislost  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  vlnové funkce soustavy dvou elektronů v základním stavu atomu helia při zanedbání interakce mezi nimi.

**Řešení:**

a) Vlnová funkce částice v nekonečně hluboké potenciálové jámě je obecně tvaru

$$\psi(x) = c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx).$$

Abychom splnili podmínku  $\psi(0) = 0$ , musí být  $c_2 = 0$

$$\psi(x) = c_1 \sin(kx).$$

Z druhé podmínky  $\psi(L) = 0$  pak dostaneme

$$k = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Protože funkce  $\sin(kx)$  a  $\sin(-kx)$  jsou závislé (druhá je jen mínus jedničkou pronásobená první), odpovídají stejnému stavu, a nevynecháme tedy žádnou možnou vlnovou funkci, pokud záporná  $n$  nebudeme uvažovat. Musíme také vyloučit případ  $n = 0$ , protože jemu odpovídá identicky nulová vlnová funkce. Výraz (S.9), udávající hustotu pravděpodobnosti, pro ni nemá smysl (nelze dělit nulou), a proto identicky nulová vlnová funkce neodpovídá žádnému fyzikálnímu stavu. Všechny možné vlnové funkce naší částice jsou tedy dány předpisem

$$\psi(x) = c_1 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vlnová délka částice v  $n$ -tém stavu je

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2L}{n},$$

takže jí odpovídá energie

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}.$$

Chceme-li mít funkci  $\psi$  normovanou, musíme zvolit  $c_1$  tak, aby byl integrál z druhé mocniny její absolutní hodnoty roven jedné

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1,$$

$$\int_0^L |c_1|^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 1,$$

a protože střední hodnota druhé mocniny sinu na celé půlperiodě je  $1/2$  a délka intervalu je  $L$ , lze podmínku přepsat jako

$$|c_1|^2 \frac{L}{2} = 1,$$

odkud plyne

$$c_1 = j \sqrt{\frac{2}{L}},$$

kde  $j$  je libovolná komplexní jednotka (komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je rovna jedné). Vzhledem k tomu, že fáze naší vlnové funkce není podstatná, můžeme zvolit například  $j = 1$ . Pak

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

b) Pokud označíme poloměr jádra helia  $R$ , bude pravděpodobnost výskytu elektronu v jádře

$$P = \int_{\Omega} |\psi|^2 dV = \int_0^R |\psi|^2 4\pi r^2 dr,$$

protože objem kulové slupky o poloměru  $r$  a tloušťce  $dr$  je  $dV = 4\pi r^2 dr$ . Užijeme-li konkrétní tvar vlnové funkce, dostaneme

$$P = \int_0^R \frac{Z^3}{\pi a_0^3} e^{-\frac{2Zr}{a_0}} 4\pi r^2 dr = 1 - \left(1 + 2Z\frac{R}{a_0} + 2Z^2\frac{R^2}{a_0^2}\right) e^{-\frac{2ZR}{a_0}}.$$

Po dosazení  $Z = 2$  a  $R = 3,1 \cdot 10^{-5} a_0$  vychází  $P = 3 \cdot 10^{-13}$ .

c) Zanedbáme-li interakci mezi elektrony, můžeme říct, že jejich společná vlnová funkce je dána přímým součinem příslušných jednočásticových vlnových funkcí

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{Z^3}{\pi a_0^3} e^{-\frac{Zr_1}{a_0}} e^{-\frac{Zr_2}{a_0}}.$$

## Kapitola 4: Schrödingerova rovnice

Nebylo by asi nejlepší zabývat se kvantovou mechanikou, aniž bychom napsali Schrödingerovu rovnici, která má stejně fundamentální význam jako Newtonova pohybová rovnice v mechanice klasické. Tato kapitola seriálu bude matematicky trochu náročnější, než bývá obvyklé, derivace budeme používat poněkud častěji. Možná Vás ale uklidní, že ve zbývajících, matematicky jednodušších, kapitolách seriálu tomu tak nebude, a že k jejich pochopení Schrödingerovu rovnici znát nemusíte.

**Časově závislá vlnová funkce.** Jak jsme viděli v minulé kapitole, přisuzuje se v kvantové mechanice každému stavu částice nenulová vlnová funkce  $\psi(x, y, z)$ , pro kterou musí

být integrál z druhé mocniny její absolutní hodnoty přes celý prostor konečný, aby se dala normalizovat. Protože se stav fyzikálních systémů obecně s časem mění, bude na čase záviset i vlnová funkce. V případě, že bereme v úvahu časovou závislost vlnové funkce, označujeme ji většinou velkým písmenem  $\Psi(x, y, z, t)$ .

**Vlnová funkce volné částice.** Podívejme se, pro jednoduchost nejprve v jednorozměrném případě, jak by měla vypadat vlnová funkce částice, která má přesně zadanou hybnost a na kterou nepůsobí žádné síly. V analogii s optikou očekáváme, že taková částice bude popsána harmonickou vlnou, protože pouze ta má přesně definovanou vlnovou délku, a tedy i hybnost. Je rozumné předpokládat, že vlnovou funkcí částice, která se šíří ve směru osy  $x$ , je

$$\Psi(x, t) = \cos(kx - \omega t) + i \sin(kx - \omega t),$$

neboli

$$\Psi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}.$$

Pro vlnčet  $k$  a úhlovou frekvenci  $\omega$  platí následující vztahy:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{\hbar}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{E}{\hbar},$$

kde  $\lambda$  je vlnová délka,  $p$  hybnost,  $T$  perioda a  $E$  energie částice. První je obsahem de Broglieho hypotézy, druhý obsahem Einsteinova vyjádření energie fotonu. Ve výrazu pro  $\Psi$  by u sinu a kosinu mohly být obecně libovolné komplexní konstanty  $c_1$  a  $c_2$ , pokud by nebyly obě zároveň nulové. My ale chceme, aby byla pravděpodobnost výskytu částice ve všech bodech prostoru stejná. Zvolíme-li  $c_1 = 1$  a  $c_2 = i$ , bude skutečně  $|\Psi|^2 = \Psi^* \Psi$  rovno konstantě v celém objemu, v našem případě jedničce. Z toho také plyne, že částice má nekonečnou neurčitost polohy, jak to vyžadují relace neurčitosti.

Jak víme, tak pro částici s nenulovou hmotností souvisí energie s hybností vztahem

$$E = \frac{p^2}{2m}. \quad (\text{S.10})$$

Je dobré si uvědomit, že fázová rychlost vlnění

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = \frac{p}{2m}$$

není rovna rychlosti částice. Té ve skutečnosti odpovídá takzvaná grupová rychlost

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m},$$

se kterou se pohybují vlnová klubka příslušející částici s trochu rozmazanou hybností.

Mírnou nevýhodou je, že žádnou vlnovou funkcí volné částice nemůžeme normalizovat, protože integrál z konstanty přes celý prostor diverguje. Jedná se ale o potíž spíše technického rázu, která nám v tomto okamžiku nemusí vadit.

**Schrödingerova rovnice.** Nyní by nás zajímalo, zda vlnová funkce volné částice nemá určité vlastnosti, které by se pak daly zobecnit na všechny částice. Zderivujeme-li funkci dvakrát podle  $x$  nebo jednou podle  $t$ , dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= -\frac{p^2}{\hbar^2} \Psi, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= -\frac{iE}{\hbar} \Psi. \end{aligned}$$

Vztahy můžeme přepsat s pomocí (S.10) jako

$$E\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2},$$

$$E\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Není-li však částice volná a pohybuje-li se pod vlivem silového pole o potenciálu  $V(x, y, z, t)$ , bude se její celková energie skládat z kinetické a potenciální ( $E = V + p^2/2m$ ). Jestliže chceme tyto rovnice zobecnit i na takovou částici, bude zřejmě potřeba předposlední rovnici mírně modifikovat

$$E\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi, \quad (\text{S.11})$$

$$E\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (\text{S.12})$$

Dostali jsme rovnice, které platí pouze pro vlnové funkce částice s přesně určenou energií. Pro jiné vlnové funkce by jejich levé strany neměly žádný smysl. Pokud z nich ale vyloučíme výraz  $E\Psi$ , získáme slavnou Schrödingerovu rovnici, která určuje časový vývoj libovolné vlnové funkce uvažované částice

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Rovnici jsme však neodvodili, pouze jsme naznačili, jaká motivace může k Schrödingerově rovnici vést. Ukazuje se ale, že experimentální výsledky jsou s ní v dobrém souladu, takže ji můžeme považovat za správný fyzikální zákon.

**Zobecnění na trojrozměrný případ.** Vlnová funkce volné částice s hybností  $(p_x, p_y, p_z)$  má tvar

$$\Psi(x, t) = e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_y y + p_z z - Et)} = e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)}$$

Zcela stejným postupem jako v předchozím odstavci můžeme intuitivně odvodit Schrödingerovu rovnici pro částici v trojrozměrném prostoru

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + V\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

**Stacionární stavy.** Stacionárními stavy se nazývají takové stavy kvantově mechanického systému, které mají přesně určenou časově konstantní energii, a pro které tedy platí rovnice (S.11) a (S.12). Existují jedině v případě, že vnější silové pole působící na systém se nemění a tedy potenciální energie  $V$  nezávisí čase. Pokud chceme zmíněnou dvojici rovnic zjednodušit, můžeme předpokládat řešení ve tvaru

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)\phi(t).$$

Dosadíme-li za  $\Psi$  do (S.11), resp. (S.12), a vydělíme-li získanou rovnici  $\phi$ , resp.  $\psi$ , dostaneme

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi,$$

$$E\phi = i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

První rovnice, udávající prostorovou závislost vlnové funkce  $\psi(x, y, z)$ , se nazývá bezčasová Schrödingerova rovnice. Její řešení závisí na tvaru potenciálu  $V(x, y, z)$ . Na rozdíl od rovnice pro časovou závislost  $\phi(t)$ , jejíž řešení můžeme napsat ihned:

$$\phi(t) = ce^{-\frac{iEt}{\hbar}}.$$

Zvolíme-li konstantu  $c$  rovnu jedné, dospějeme k závěru, že libovolný stacionární stav má vlnovou funkci ve tvaru

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)e^{-\frac{iEt}{\hbar}},$$

kde  $\psi(x, y, z)$  splňuje bezčasovou Schrödingerovu rovnici s příslušnou hodnotou energie. Jak je vidět, vlnová funkce částice závisí na čase, ale pouze triviálně. Vlnovou funkci v čase  $t = T$  dostaneme z funkce v čase  $t = 0$  pouze vynásobením konstantou  $\exp(-\frac{iET}{\hbar})$ , takže můžeme říct, že částice zůstává stále ve stejném stavu. Hustota pravděpodobnosti výskytu částice pro stav  $\Psi$  vychází

$$\Psi^* \Psi = \psi^* e^{+\frac{iEt}{\hbar}} \psi e^{-\frac{iEt}{\hbar}} = \psi^* \psi,$$

a s časem se nemění.

V případě vázaných stavů částice (tj. stavů se zápornou energií vůči nekonečnu) existuje normalizovatelné řešení bezčasové rovnice pouze pro některé diskrétní hodnoty  $E$ . Pokud má tedy částice přejít z jednoho stacionárního stavu do stavu s jinou hodnotou energie, musí tak učinit najednou vysláním nebo pohlcením určitého množství (kvanta) energie. Právě tato vlastnost dala celé teorii název kvantová mechanika.

### Úloha S.IV ... časový vývoj

a) Mějme dvě časově závislé vlnové funkce  $\Psi_1(x, y, z, t)$  a  $\Psi_2(x, y, z, t)$ , které odpovídají stacionárním stavům s různými energiemi  $E_1$  a  $E_2$ . Pokud budete chtít, můžete si dosazením do časové Schrödingerovy rovnice ověřit, že i jejich superpozice

$$\Psi(x, y, z, t) = a\Psi_1(x, y, z, t) + b\Psi_2(x, y, z, t), \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad |a| + |b| \neq 0,$$

odpovídá časovému vývoji přípustné vlnové funkce. Vaším úkolem je ale něco jiného. Máte zjistit, za jakou dobu  $T$  bude částice, která byla v čase  $t = 0$  popsána funkcí  $\Psi(x, y, z, 0)$ , opět ve stejném stavu. Jinak řečeno, najděte nejmenší možné  $T > 0$ , pro které je

$$\Psi(x, y, z, T) = c\Psi(x, y, z, 0),$$

kde  $c$  je libovolné nenulové komplexní číslo.

b) Vypočtěte vlnovou délku fotonu o frekvenci, s jakou se mění stav (nikoli vlnová funkce!) elektronu v atomu vodíku, když je v superpozici jednoho stacionárního stavu na druhé a jednoho na třetí energetické hladině.

### Řešení:

a) Máme najít nejmenší možné  $T > 0$ , pro které existuje takové  $c$ , že ve všech bodech  $(x, y, z)$  bude splněna rovnost

$$a\psi_1(x, y, z)e^{-\frac{iE_1T}{\hbar}} + b\psi_2(x, y, z)e^{-\frac{iE_2T}{\hbar}} = ca\psi_1(x, y, z) + cb\psi_2(x, y, z).$$

V případě, že jedno z čísel  $a, b$  bude nulové, lze tuto relaci splnit pro libovolné  $T$ , pokud zvolíme

$$c = e^{-\frac{iEt}{\hbar}},$$

kde  $E = E_1$  nebo  $E = E_2$  podle toho, jestli  $b = 0$  nebo  $a = 0$ . Systém zůstává pořád ve stejném stavu a hledat nejmenší možné  $T > 0$  nemá smysl.

V případě, že jsou v superpozici skutečně zastoupeny oba stavy ( $a \neq 0, b \neq 0$ ), vypadá situace jinak. Protože funkce  $\psi_1$  a  $\psi_2$  jsou lineárně nezávislé, musí být

$$c = e^{-\frac{iE_1T}{\hbar}}, \quad c = e^{-\frac{iE_2T}{\hbar}},$$

neboli

$$\cos\left(-\frac{E_1T}{\hbar}\right) + i \sin\left(-\frac{E_1T}{\hbar}\right) = \cos\left(-\frac{E_2T}{\hbar}\right) + i \sin\left(-\frac{E_2T}{\hbar}\right).$$

Vidíme, že za dobu  $T$  se musí relativní fáze obou vlnových funkcí změnit o  $2k\pi$

$$\frac{E_1T}{\hbar} = \frac{E_2T}{\hbar} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Minimální doba  $T$ , kterou hledáme, bude tedy rovna

$$T = \frac{2\pi\hbar}{|E_2 - E_1|}.$$

b) Energie elektronu na  $n$ -té hladině v atomu vodíku je

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2},$$

takže s využitím výsledku předchozí části úlohy lehce zjistíme, že stav elektronu se mění s frekvencí

$$f = \frac{1}{T} = \frac{E_3 - E_2}{h} = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4}\right).$$

Foton se stejnou frekvencí bude mít vlnovou délku

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{288\varepsilon_0^2 h^3 c}{5m_e e^4} \simeq 657 \text{ nm}.$$

Jedná se přesně o vlnovou délku spektrální čáry, která odpovídá rozdílu energií příslušných hladin. Můžeme tedy uzavřít, že při přeskoku mezi energetickými hladinami vyšle elektron foton se stejnou frekvencí, s jakou v mezistavu sám kmitá.

## Kapitola 5: Kvantová teorie pole

Nerelativistická kvantová mechanika neobsahuje žádné rozpory a je velice uspokojujivou teorií. Když se ale fyzikové v první polovině tohoto století snažili vytvořit kvantovou mechaniku, která by byla v souladu se speciální relativitou, narazili na velké problémy se zápornou hustotou pravděpodobnosti, komplexní energií a jinými patologickými skutečnostmi. Ukázalo se, že vnitřně konzistentní relativistickou kvantovou mechaniku jedné částice vůbec formulovat nelze, protože v jejím rámci není možné definovat pojem polohy částice. Není divu, že takové pokusy selhaly, podobná teorie by totiž nebyla schopna popsat procesy kreace a anihilace částic, které při relativistických energiích nastávají. Místo ní byla vytvořena kvantová teorie pole, perfektně popisující náš svět v místech, kde není příliš silné gravitační pole.

**Speciální teorie relativity.** Dříve, než se začneme blíže bavit o kvantové teorii pole, zmíníme se o speciální relativitě a ukážeme si vztahy, které by mohly být třeba k vyřešení úloh z této kapitoly.

Jedná se o teorii vycházející z prvních dvou Newtonových zákonů v Newtonově formulaci, rovnoprávnosti inerciálních systémů a empirického faktu, že světlo se ve vakuu šíří vždy



stejnou rychlostí nezávislou na rychlosti zdroje. Speciální relativita reviduje pojmy prostoru, času a současnosti událostí. Polohy a časy událostí z hlediska různých inerciálních soustav již nejsou svázány známou Galileovou transformací, ale transformací Lorentzovou, z níž pak mimo jiné plyne vztah pro skládání rovnoběžných rychlostí

$$w = \frac{u + v}{1 + uv/c^2},$$

který platí, pokud  $w$  je rychlost částice v naší soustavě a  $v$  její rychlost měřená v soustavě, jež se vůči nám pohybuje rychlostí  $u$ .

Hmotnost relativistické částice se dá vyjádřit jako

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

kde  $v$  je rychlost částice a  $m_0$  její klidová hmotnost, tj. hmotnost měřená v inerciální soustavě vůči níž je částice v klidu. Klidová hmotnost částice pohybující se rychlostí světla  $c$  musí být tedy nulová.

Kinetická energie částice je rovna rozdílu celkové a klidové energie

$$T = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2$$

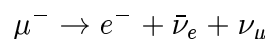
a celková energie je s hybností svázána vztahem

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4.$$

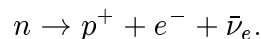
Hybnost  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  je definována stejně jako v newtonovské mechanice. Pro částici s nulovou klidovou hmotností se rovnost zjednoduší na  $E = pc$ .

Ve speciální relativitě platí zákon zachování hybnosti ( $\mathbf{p}$ ), energie ( $E$ ), a tedy i hmotnosti ( $m$ ), ale rozhodně není pravda, že by se musel zachovávat součet klidových hmotností jednotlivých částí izolovaného systému.

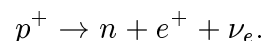
**Kreace a anihilace částic.** V mikrosvětě dochází velice často ke vzniku a zániku částic. Jako příklad může posloužit rozpad mionu na elektron, elektronové antineutrino a mionové neutrino



nebo třeba  $\beta^-$  rozpad



Kvantová teorie pole povoluje v podstatě všechny přeměny, které neodporují zákonům zachování, a je schopna předpovědět, s jakou pravděpodobností která nastane. Pokud je povolena určitá reakce, může nastávat i proces, který dostaneme ubráním částice na jedné straně rovnice a přidáním příslušné antičástice na stranu druhou. Tímto způsobem dostaneme z rozpadu  $\beta^-$  rovnici rozpadu  $\beta^+$



Je třeba připomenout, že zatímco se volný neutron po chvíli sám rozpadá,  $\beta^+$  rozpad je možný jedině v případě, že je protonu dodána energie z vnějšku, například ostatními nukleony v atomovém jádře s přebytkem protonů. Volný proton se nemůže tímto způsobem rozpadnout z jednoduchého důvodu. Pokud bychom se na něj dívali z jeho klidové soustavy, měl by celkovou energii  $m_0pc^2 = 938,3 \text{ MeV}$ , zatímco energie částic na pravé straně poslední rovnice je vždy větší nebo rovna součtu jejich klidových energií  $m_0nc^2 + m_0ec^2 = 940,1 \text{ MeV}$ .

**Relace neurčitosti.** Kromě relací neurčitosti mezi polohou a hybností se v kvantové fyzice uplatňuje i relace mírně odlišného charakteru

$$\Delta E \Delta t \simeq \hbar,$$

kteřá udává přesnost  $\Delta E$ , s jakou lze změřit energii systému, pokud měření provádíme po dobu  $\Delta t$ . Znamená to, že zákon zachování energie neplatí zcela přesně a energie izolovaného systému se může změnit o  $\Delta E$ , pokud tato fluktuace netrvá déle než po dobu  $\hbar/\Delta E$ . Díky tomu se může ve vakuu zrodit pár částice a antičástice a za chvíli zase anihilovat. Takové částice nazýváme virtuálními, protože nesplňují podmínku  $E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$  a není možné je pozorovat. Pokud jim ale dodáme energii převyšující součet jejich klidových energií, nemůže jim zákon zachování energie bránit v existenci a částice může svobodně opustit svou antičástici.

### Úloha S. V ... srážky a rozpady částic

a) Pion  $\pi^0$ , který byl v laboratorní soustavě v klidu, se rozpadl na dva fotony

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma.$$

Vypočítejte jejich energie.

b) Pokud mají dva elektrony dostatečně velkou energii, může se při jejich srážce zrodit elektron-pozitronový pár

$$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^- + e^- + e^+.$$

Určete, jakou minimální energii a rychlost musí mít první elektron v laboratorní soustavě, pokud je druhý elektron v téže soustavě v klidu. Uvažte, že v mezním případě se při pohledu z těžiškové soustavy srazí dva elektrony s opačnými hybnostmi a všechny čtyři výsledné částice pak zůstanou prakticky stát.

### Řešení:

Pro zkrácení zápisu nebudeme v celém řešení označovat klidovou hmotnost  $m_0$ , ale  $m$  s indexem příslušné částice. V tabulkách nalezneme

$$m_e c^2 = 0,510999 \text{ MeV}$$

$$m_{\pi^0} c^2 = 134,9626 \text{ MeV}$$

$$m_{\pi^+} c^2 = 139,5669 \text{ MeV}$$

$$m_{\mu^+} c^2 = 105,6595 \text{ MeV}$$

a) Protože na počátku byl pion v klidu, musí být součet hybností obou fotonů nulový

$$\mathbf{p}_{\gamma 1} + \mathbf{p}_{\gamma 2} = 0,$$

takže ze vztahu pro energii fotonu  $E = cp$  vidíme, že oba musí mít energii stejnou. Ze zákona zachování energie pak plyne

$$m_{\pi^0} c^2 = 2E_\gamma$$

a energie každého fotonu tedy bude

$$E_\gamma = \frac{1}{2} m_{\pi^0} c^2 = 67,4813 \text{ MeV}.$$

b) Podívejme se na celý systém jako na jedno těleso T. Jeho klidovou hmotnost před srážkou můžeme s pomocí veličin měřených v laboratorní soustavě vyjádřit jako

$$c^4 m_T^2 = E_T^2 - c^2 p_T^2 = (E + m_e c^2)^2 - c^2 p_e^2.$$

V mezním případě, kdy ještě může elektron-pozitronový pár vzniknout, zůstanou po srážce všechny čtyři částice v těžiškové soustavě prakticky stát. To v případě srážkových experimentů znamená, že se budou pohybovat pouze rychlostmi například tisíc kilometrů za sekundu, tj. daleko menšími než je rychlost světla. V každém případě se dostanou od sebe tak daleko, abychom mohli zanedbat jejich vzájemné elektrické působení. Klidová hmotnost tělesa po srážce elektronů pak bude prostě součet hmotností výsledných čtyř částic:  $m_T = 4m_e c^2$ . Stejně jako volná částice nemůže změnit svoji klidovou hmotnost, musí se i klidová hmotnost našeho tělesa zachovávat. Jedná se v podstatě pouze o zákon zachování hmotnosti při pohledu z těžiškové soustavy tělesa, protože v ní je celková hmotnost tělesa rovna hmotnosti klidové. Srovnáním posledních dvou rovností získáme vztah

$$(E_e + m_e c^2)^2 - c^2 p_e^2 = 16m_e^2 c^4 ,$$

který můžeme ještě dále upravit

$$\begin{aligned} E_e^2 - c^2 p_e^2 + 2m_e c^2 E_e + m_e^2 c^4 &= 16m_e^2 c^4 , \\ m_e^2 c^4 + 2m_e c^2 E_e + m_e^2 c^4 &= 16m_e^2 c^4 . \end{aligned}$$

Odtud již jasně vidíme, že v laboratorní soustavě musí být energie nalétávajícího elektronu nejméně

$$E_e = 7m_e c^2 .$$

Z vyjádření celkové hmotnosti elektronu pomocí klidové

$$\frac{E_e}{c^2} = \frac{m_e}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

pak už snadno dopočítáme nejmenší možnou rychlost, jakou tento elektron musí letět

$$v = \frac{4\sqrt{3}}{7} c .$$

Možná si teď říkáte, jak můžeme používat zachování klidové hmotnosti soustavy částic, když v textu páté kapitoly jasně popíráme, že by se musel zachovávat součet klidových hmotností jednotlivých částí izolovaného systému. Není v tom ale žádný rozpor, klidová hmotnost totiž není aditivní veličina. Na rozdíl od celkové hmotnosti není pravda, že by klidová hmotnost celku byla totéž, co součet klidových hmotností jednotlivých částí. Velice dobře je to vidět z prvního vyjádření  $m_T$ , které jsme v tomto odstavci použili.

Ke stejné výsledné energii a rychlosti bychom samozřejmě mohli dospět i prostým roze-psáním zákonů zachování v těžiškové soustavě (TS) a následnou transformací těchto veličin do soustavy laboratorní

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{e1}^{TS} + \mathbf{p}_{e2}^{TS} = 0 &\Rightarrow E_{e1}^{TS} = E_{e2}^{TS} \equiv E_e^{TS} \\ 2E_e^{TS} = 4m_e c^2 &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - (v^{TS})^2/c^2}} = 2 \Rightarrow v^{TS} = \frac{\sqrt{3}}{2} c \\ v = \frac{2v^{TS}}{1 + (v^{TS})^2/c^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7} , & \quad E_e = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 7m_e c^2 . \end{aligned}$$

První řešení je ale mnohem elegantnější a poučnější.

## Kapitola 6: Elementární částice

**Yukawova teorie jaderných sil.** Poté, co v roce 1932 Chadwick vysvětlil výsledky experimentů Curieové a Jolioty pomocí hypotézy o existenci neutronu, bylo již jasné, že jsou to přesně ty částice, které spolu s protony tvoří atomová jádra. Složení jaderné hmoty se tedy vyjasnilo — jádro s atomovým číslem  $Z$  a hmotnostním  $A$  obsahuje  $Z$  protonů a  $A - Z$  neutronů, o charakteru jaderných sil však kromě jejich krátkého do-  
sahu nebylo známo prakticky nic. Ještě téhož roku navrhl Heisenberg, že by mohly být způsobeny výměnou elektronů a pozitronů mezi protony a neutrony. Neutron by podle této hypotézy emitoval elektron a změnil se na proton, zatímco sousední proton by se při zachytu téhož elektronu stal neutronem. Vypočtená síla interakce však vycházela  $10^{14}$ -krát menší než by bylo potřeba. Roku 1935 pak modifikoval Heisenbergovu myšlenku Yukawa předpokladem, že výměnnými částicemi nejsou elektrony, ale nové částice o dva řády hmotnější. Předpokládal, že interakce mezi dvěma protony nebo mezi dvěma neutrony jsou způsobeny výměnou neutrálních mezonů  $\pi^0$  a síly mezi protonem a neutronem zprostředkovávají nabitě mezony  $\pi^+$  a  $\pi^-$ , přičemž příslušné procesy můžeme vystihnout rovnicemi

$$n \rightarrow p + \pi^-, \quad p + \pi^- \rightarrow n$$

nebo

$$p \rightarrow n + \pi^+, \quad n + \pi^+ \rightarrow p.$$

Podívejme se nyní, jak si můžeme názorně představit vznik odpudivé síly při podobné výměně částic. Představte si třeba v létě na rybníce dva lidi, každého na jedné neukotvené loďce. Kdyby by je snad napadlo házet si mezi sebou míčem, asi by jim to dlouho nevydrželo. Při každém vyhození míče by totiž dostala jedna loďka zpětný ráz a při zachycení by zase druhá loďka získala hybnost směřující od první. Efektivně by se tedy lodě odpuzovaly a po určité době by se dostaly do vzdálenosti, která se už nedá přehodit.

Trochu obtížnější je představit si přitažlivou sílu vznikající v důsledku výměny částic. Bude možná lepší vzít rovnou v úvahu kvantové efekty než vytvářet nějakou silně pokulhávající klasickou představu. Mějme proton, který vyšle mezon  $\pi^0$  s určitou hybností směřující od druhého protonu. Protože má tento pion dobře určenou hybnost, nemůžeme říct, kde se vlastně nachází, a nemůžeme tedy vyloučit, že do druhého protonu narazí. Pokud se tak skutečně stane, dostane druhý proton hybnost ve směru k prvnímu protonu, z něhož pion vyšel. (S trochou nadsázky to můžeme vyjádřit tak, že v kvantovém světě vás může trefit i kulka, kterou střelec vystřelil směrem od vás.) Je jasné, že v takovém případě dochází ke vzniku přitažlivé síly.

Velkým triumfem Yukawovy teorie byl experimentální objev pionu. Nárok na fundamentální teorii silných interakcí si však tento model činit nemůže, protože, jak dnes víme, nukleony i piony jsou složené částice a daleko lépe je popisuje jiná teorie silné interakce, kvantová chromodynamika.

**Svět leptonů a kvarků.** Již od dávných dob se lidé snažili zjistit, z čeho se věci kolem nás skládají. Současná odpověď na tuto otázku je následující:

Existuje šest druhů kvarků, šest druhů leptonů a částice (tzv. intermediální bosony), které zprostředkovávají čtyři základní interakce — elektromagnetickou, slabou, silnou a gravitační.

Leptony jsou většinou lehké částice se spinem (tj. klidovým momentem hybnosti)  $1/2$  a známe jich celkem šest: elektron  $e^-$ , mion  $\mu^-$ , tauon  $\tau^-$  a k nim příslušná neutrina  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ . Zatímco první tři mají nenulovou klidovou hmotnost, neutrina jsou pravděpodobně nehmotná<sup>8</sup> (tj. mají nulovou *klidovou* hmotnost). Experimenty ukazují, že platí zákon

<sup>8</sup>V červenci 1998 byla změřena klidová hmotnost neutrina. Je větší než 0,1 eV, což je opravdu velmi málo. Pro srovnání, elektron váží asi 0,5 MeV.

zachování elektronového, mionového a tauonového leptonového čísla. Leptonům  $e$  a  $\nu_e$  je přisouzeno elektronové leptonové číslo 1, jejich antičásticím  $e^+$  a  $\bar{\nu}_e$   $-1$  a ostatní částice mají elektronové leptonové číslo nulové. Díky těmto zákonům zachování nemůže proběhnout reakce

$$p + e \rightarrow n + \nu_\mu,$$

zatímco podobný proces

$$p + e \rightarrow n + \nu_e$$

je povolen. Všechny leptony interagují gravitačně a slabě a ty z nich, které mají nenulový elektrický náboj, také elektromagneticky. Silná interakce však na leptony vůbec nepůsobí.

Kvarků, které mají stejně jako leptony spin  $1/2$ , je také šest a označují se písmeny  $u$  (up),  $c$  (charm),  $t$  (top),  $d$  (down),  $s$  (strange) a  $b$  (bottom). Těmto charakteristikám kvarků se také říká vůně. První tři mají elektrický náboj  $2/3$  (v jednotkách náboje pozitronu) a zbývající  $-1/3$ .

Z kvarků se skládají všechny hadrony, přičemž baryony ze tří kvarků a mezony z páru kvark–antikvark. Na rozdíl od leptonových čísel existuje pouze jediné baryonové číslo, které se zachovává. Pro baryony je definováno jako 1, pro antibaryony  $-1$  a pro ostatní částice 0. Povolená je tedy například přeměna

$$n(ddu) + \mu^+ \rightarrow p(uud) + \bar{\nu}_\mu,$$

ale třeba následující proces

$$K^-(\bar{u} s) + \Sigma^+(uus) \rightarrow \Sigma^-(dds) + \bar{n}(\bar{d}\bar{d}\bar{u}) + \Delta^{++}(uuu) + \Xi^-(dss)$$

nemůže podle současných experimentálních zkušeností nastat, protože celkové baryonové číslo částic na levé straně je  $0 + 1 = 1$  a na pravé  $1 + (-1) + 1 + 1 = 2$ . (V závorkách jsou vždy uvedeny vůně kvarků, ze kterých se částice skládají. Čarou nad písmenem se značí antičástice v případě, že k jejímu označení nestačí znaménko elektrického náboje. Máme tak například následující páry částice a antičástice:  $n \leftrightarrow \bar{n}$ ,  $\Sigma^+ \leftrightarrow \bar{\Sigma}^+$ , ale také  $e^- \leftrightarrow e^+$ .) Existují však tzv. GUT modely, které předpovídají, že zákon zachování baryonového čísla se přece jen může ve velice málo pravděpodobných procesech porušit.

Kromě vůně a elektrického náboje mají kvarky ještě další charakteristiku — barvu, kterou žádné jiné částice nemají. Stejně jako vůně, ani barva nemá nic společného se smyslovým vnímáním člověka a je pouze poetickým názvem pro náboj silné interakce. Existují tři druhy barev — červená, modrá a zelená. Všechny částice, které v přírodě můžeme samostatně pozorovat, jsou ale bezbarvé, protože kvarky uvnitř hadronů mají každý jinou barvu a mezony se skládají třeba z červeného a antičerveného kvarku. Všech šest kvarků interaguje elektromagneticky, slabě, silně i gravitačně.

**Prostředníci interakcí.** Elektromagnetická interakce je zprostředkována fotonem, částicí s nulovou klidovou hmotností, nulovým elektrickým nábojem a spinem 1. Toto zprostředkování probíhá stejným mechanismem, jaký jsme viděli v Yukawově teorii jaderných sil. Například odpuzování dvou elektronů je způsobeno tím, že jeden elektron vyšle virtuální foton a druhý ho zachytí. Elektromagnetická síla působí pouze na ty částice, které nesou elektrický náboj. Fotony interagují gravitačně a elektromagneticky, v druhém případě však fungují pouze jako prostředník síly, tj. samy virtuální foton vyslat nemohou.

Prostředníkem slabé interakce jsou částice se spinem 1,  $W^+$ ,  $W^-$  a  $Z^0$ . Jak napovídá jejich název, nesou první dva elektrický náboj, zatímco třetí je neutrální. Protože jsou velice těžké (mají klidovou energii skoro 100 GeV), je málo pravděpodobné, že takový boson bude vyslán, a interakce se projevuje velmi slabě, což dalo také této síle název. Částice  $W^+$ ,  $W^-$

a  $Z^0$  interagují gravitačně, slabě a kromě  $Z^0$  také elektromagneticky. Od fotonu se liší tím, že samy mohou být zdrojem virtuálních intermediálních bosonů slabé interakce.

Silnou interakci zprostředkovává osm druhů gluonů se spinem 1, které nemají žádnou klidovou hmotnost ani elektrický náboj. Roli, jakou v elektromagnetismu hraje elektrický náboj, zde přebírá barva. Silná interakce je tak intenzivní, že nedovolí samostatnou existenci kvarků. Pokud bychom se, obrazně řečeno, snažili vytrhnout jeden kvark z protonu, museli bychom systému dodat více energie, než je potřeba k vytvoření páru kvark–antikvark. Poblíž vytrhávaného kvarku by tak vznikl antikvark a na jeho místě v protonu nový kvark. Nakonec bychom tedy měli jeden bezbarvý baryon a jeden bezbarvý mezon. O síle interakce svědčí také to, že pouze polovinu klidové energie nukleonů nesou kvarky a druhou polovinu gluony, které si kvarky vyměňují. Gluony interagují gravitačně a silně, nejsou však pouhým prostředníkem silné interakce, protože mohou samy vysílat virtuální gluony.

Největší potíže dělá teoretikům gravitace, kterou nelze konzistentně formulovat v rámci kvantové teorie pole, a tak nejlepší teorií gravitace stále zůstává Einsteinova nekvantová obecná teorie relativity, přestože pro slabá pole se určité kvantové výpočty provádět dají. V každém případě je jasné, že každá kvantová teorie gravitace musí jako zprostředkující částici obsahovat graviton, nehmotnou částici se spinem 2. Nejdůležitější vlastností této síly je její univerzalita — gravitace působí stejným způsobem na úplně všechny částice.

**Sjednocování interakcí.** V šedesátých letech zjistili Weinberg, Salam a Glashow, že slabá interakce a elektromagnetismus nejsou oddělené jevy, ale pouze dva různé projevy jedné interakce, zvané elektroslabá, a že při vysokých energiích, kdy je klidová hmotnost  $W^+$ ,  $W^-$  a  $Z^0$  zanedbatelná, se chovají tyto částice podobně jako foton. V oblastech vysokých energií jsou také obě interakce stejně silné. Tato symetrie mezi prostředníky slabé a elektromagnetické interakce je však při nízkých energiích spontánně narušena, a proto ji v našem světě nevidíme.

Mechanismus spontánního narušení symetrie můžeme přirovnat k chladnutí feromagnetika. Při vysokých teplotách (tj. při vysokých energiích atomů) není v železe při nulovém vnějším magnetickém poli žádná magnetizace a systém vypadá ve všech směrech stejně. Když se ale dostaneme pod tzv. Curieovu teplotu, železo se v daném místě zmagnetuje. Nevíme jakým směrem, víme pouze, že nějakým určitě. Tím vzniknou v železe oblasti (domény), v nichž je zcela určitý směr magnetizace a železo v nich již nemá původní symetrii (nevypadá ve všech směrech stejně).

Mohlo by se zdát, že nulová hmotnost fotonu a nenulová hmotnost prostředníků slabé interakce je pro podobné sjednocení sil velkou překážkou. Není to ale pravda. Intermediální bosony elektroslabé interakce jsou uvažovány nehmotné a hmotnost  $W^+$ ,  $W^-$  a  $Z^0$  je pouze projevem jejich interakce s tzv. Higgsovým bosonem. Tento boson přes velké experimentální úsilí dosud nebyl samostatně pozorován, zřejmě proto, že má obrovskou hmotnost, nedosažitelnou současnými urychlovači.

O několik let později byla vytvořena i teorie sjednocující silnou a elektroslabou interakci zvaná GUT (Grand Unified Theory), předpověď jedné její verze o poločasů rozpadu protonu však nebyla experimentálně potvrzena.

**Teorie superstrun.** V šedesátých letech, kdy ještě nebyla vytvořena fungující teorie silné interakce (kvantová chromodynamika), se objevily tendence vysvětlovat tuto sílu za předpokladu, že nejzákladnější částice nejsou bodové, ale že jsou to ve skutečnosti otevřené nebo uzavřené provázky (struny), utkané z nehmotných vláken. Silné interakce se takto vysvětlit nepodařilo, například proto, že nebylo možné nalézt vhodnou interpretaci nehmotné částice se spinem 2, která se ve spektru nevyhnutelně objevuje. Možná již ale tušíte, že touto částicí je právě graviton, a že taková strunná teorie v sobě kromě jiného obsahuje i gravitaci.

Strunné teorie jsou tedy cestou, jak smířit obecnou relativitu a kvantovou teorií, a vkládají se do nich naděje, že by mohly vést k jednotné teorii všech interakcí.

Původně byla vytvořena teorie bosonových strun, což je kvantové a relativistické zobecnění mechaniky běžné struny (třeba kytarové). Ukázalo se, že tato teorie nejlépe funguje v prostoročase s 26 dimenzemi, a že předpovídá existenci tachyonů. S tím prvním by nebyly žádné principiální potíže, stačí předpokládat, že 22 prostorových dimenzí je tak krátkých (řádu třeba  $10^{-34}$  m), že v našich podmínkách vnímáme pouze  $3 + 1$ . Klasickou analogií může být například tenká válcová trubka. Pokud je její poloměr veliký, vnímáme její povrch jako dvourozměrný, když však začneme její poloměr zmenšovat, budeme ji po určité době vnímat spíše jako jednorozměrnou tyč. Daleko větším problémem teorie byla absence fermionů (částic s polocelým spinem) a výskyt tachyonu, nadsvětelné částice, která se v žádné fyzikální teorii nesmí objevit.

Tyto potíže odstranila teorie supersymetrických strun (superstrun). Supersymetrie je zvláštní symetrie, která každému fermionu přiřazuje jeden boson (částici s celočíselným spinem) a naopak. Pokud tedy například nějaká supersymetrická teorie obsahuje graviton (se spinem 2), musí popisovat také tzv. gravitino (se spinem  $3/2$ ) a podobně. Teorie superstrun funguje v 10 rozměrném prostoročase, takže je potřeba svinout pouze šest dimenzí. Není pravda, že by se zde od počátku tachyon nevyskytoval, existuje však jednoduchý způsob, jak se ho zbavit (tzv. GSO projekce).

**M-teorie.** Teorie superstrun má pět různých verzí a bylo obrovským překvapením, když se v roce 1994 začalo ukazovat, že jsou si vzájemně ekvivalentní. Bylo stále jasnější, že se jedná pouze o pět různých limit jedné jedenácti-rozměrné teorie nazvané M-teorie (magická teorie). Další limitou M-teorie je jedenácti-rozměrná supergravitace, o jejímž vztahu k superstrunám se dříve vůbec nevědělo. V M-teorii se kromě běžných strun začaly objevovat i vícedimenzionální objekty, jako například dvourozměrné membrány, takže se svět superstrun ukázal být mnohem bohatším, než se původně zdálo. Dalším velkým průlomem byla neporuchová formulace M-teorie nalezená roku 1996. Ta umožňuje výpočty i v takových oblastech, kde původní poruchové verze superstrunných teorií naprosto selhávaly. O podobném výsledku si běžné kvantové teorie pole mohou nechat jenom zdát. V rámci M-teorie byly vypracovány modely podobné dříve vytvořeným GUT teoriím, takže to vypadá, že je na správné cestě k reprodukování výsledků standardních teorií pole dobře ověřených experimenty. Zajímavé jsou také výsledky z let 1996–1998, kdy se podařilo nalézt mikroskopický původ entropie černých děr, zavedené již daleko dříve Hawkingem.

M-teorie má všechny vlastnosti, které očekáváme od finální jednotné teorie všech interakcí, lze ji formulovat neporuchově, obsahuje obecnou relativitu, a zřejmě bude schopna dojít ke stejným výsledkům jako konvenční teorie pole. Zbývá však nalézt způsob, jakým je narušena supersymetrie, kterou v našem světě nízkých energií vůbec nepozorujeme. Jestli M-teorie skutečně povede k finální teorii, to ukáže teprve budoucnost.

### Úloha S. VI ... *hmotnost pionu a zákony zachování*

a) Najděte horní řádový odhad hmotnosti mezonu  $\pi^0$ , který podle Yukawovy teorie zprostředkovává silnou interakci mezi dvěma neutrony, když víte, že její dosah je zhruba  $10^{-15}$  m. Vzpomeňte si na „relaci neurčitosti mezi časem a energií“, uvažte, že energie, která se nezachovává je minimálně  $m_\pi c^2$  a že pion za příslušný čas nemůže doletět dál než světlo ve vakuu.

b) Rozhodněte, zda mohou podle současných znalostí v principu proběhnout následující procesy

$$p^+ + e^- \rightarrow K^- + e^+ + \nu_e + \nu_e,$$

$$\pi^0 + \mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_\mu + \nu_e,$$

$$\Delta^{++} \rightarrow p^+ + \pi^0,$$

a svůj výsledek zdůvodněte.

### Řešení:

a) Když neutron vyše virtuální pion  $\pi^0$ , nezachová se energie  $\Delta E = m_{\pi^0} c^2$ , proto nemůže tento pion existovat déle než po dobu

$$\Delta t \leq \frac{\hbar}{\Delta E} = \frac{\hbar}{m_{\pi^0} c^2}.$$

Vzhledem k tomu, že se virtuální pion nemůže pohybovat rychleji než světlo ve vakuu, doletí za dobu své existence maximálně do vzdálenosti

$$R \leq c\Delta t.$$

Z dosahu interakce  $R = 10^{-15}$  m můžeme tedy vypočítat horní mez pro hmotnost pionu  $\pi^0$

$$m_{\pi^0} \leq \frac{\hbar}{Rc} \simeq 3,5 \cdot 10^{-28} \text{ kg} \simeq 200 \text{ MeV}/c^2.$$

Skutečná hmotnost mezonu  $\pi^0$  je  $135 \text{ MeV}/c^2$ , řádový odhad této hmotnosti podle Yukawovy teorie je správný.

b) Ani jeden z procesů, uvažovaných v zadání, nemůže proběhnout. V prvním případě

$$p^+ + e^- \rightarrow K^- + e^+ + \nu_e + \nu_e$$

je baryonové číslo levé strany  $1 + 0 = 1$  a pravé strany  $0 + 0 + 0 + 0 = 0$ , takže se nezachovává. Druhému procesu

$$\pi^0 + \mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_\mu + \nu_e$$

brání zákon zachování mionového leptonového čísla. Levá strana má toto číslo  $0 + (-1) = -1$ , zatímco na pravé straně je  $0 + 1 = 1$ . A konečně rozpad

$$\Delta^{++} \rightarrow p^+ + \pi^0$$

nemůže proběhnout prostě proto, že by se nezachoval elektrický náboj, který je na levé straně 2, ale na pravé pouze  $1 + 0 = 1$ .

### Literatura

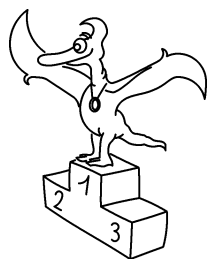
ARTHUR BEISER: Úvod do moderní fyziky, *Academia, Praha 1977*.

ALEXANDR SERGEJEVIČ DAVYDOV: Kvantová mechanika, *SPN, Praha 1978*.

JIŘÍ FORMÁNEK: Úvod do kvantové mechaniky, *Academia, Praha 1983*.

LUBOŠ MOTL: <http://www.kolej.mff.cuni.cz/~lumo/RUZE/index2.html>





## Pořadí nejlepších řešitelů

### Kategorie čtvrtých ročníků

Pořadí	Jméno	Příjmení	Škola	Body
	Student	Pilný	MFF UK	215
1	Karel	Kolář	Gymnázium Sušice	196
2	Martin	Tamáš	Gymnázium Bardejov	138
3	Matúš	Medo	Gymnázium Košice	124
4	Miroslav	Kladiva	Gymnázium Košice	107
5	Jakub	Černý	Gymnázium Mělník	104
6	Jiří	Kvita	Gymnázium Hranice na Moravě	100
7	Roman	Kováčik	PSG Bratislava	96
8	Štěpánka	Kučková	Gymnázium Praha 6	96
9	Jiří	Štěpán	Gymnázium Praha 5 – Radotín	92
10	Ondřej	Pejchal	Gymnázium Brno	89

### Kategorie třetích ročníků

Pořadí	Jméno	Příjmení	Škola	Body
	Student	Pilný	MFF UK	215
1	Lukáš	Poul	Gymnázium Brno	167.5
2	Lenka	Zdeborová	Gymnázium Plzeň	166
3	Lukáš	Uhl	Gymnázium Brno	124.5
4	Daniel	Sprinzl	Gymnázium Dačice	119.5
5	Jan	Mysliveček	Gymnázium Brno	110
6	Miroslav	Černý	Gymnázium Kutná Hora	108.5
7	David	Holec	Gymnázium Brno	102.5
8	Petr	Klenka	Gymnázium Praha 10	99
9	Miroslav	Musil	Gymnázium Nové Město na Moravě	95.5
10	Lukáš	Filip	Gymnázium Náchod	85.5

*Kategorie druhých ročníků*

Pořadí	Jméno	Příjmení	Škola	Body
	Student	Pilný	MFF UK	215
1	David	Šumský	Gymnázium Třinec	83.5
2	Karel	Kouřil	Gymnázium Blansko	75
3	Andrej	Pavlík	Gymnázium Trenčín	59.5
4	Jakub	Kulaviak	Gymnázium Blansko	46.5
5	Daniel	Fiala	Gymnázium Horažďovice	44
6	Jiří	Přenosil	Gymnázium Aš	33
7	Ondřej	Souček	Gymnázium Jablonec nad Nisou	28
8	Miroslav	Pištek	Gymnázium Sedlčany	26.5
9	Klára	Maturová	Gymnázium Tanvald	23.5
10	Kateřina	Šetková	Gymnázium Klatovy	21

*Kategorie prvních ročníků*

Pořadí	Jméno	Příjmení	Škola	Body
	Student	Pilný	MFF UK	215
1	Jakub	Levic	Gymnázium Louny	34
2	Hedvika	Kadlecová	Gymnázium Praha 2	24.5
3	Jiří	Doubek	Gymnázium Praha 6	19
4	Jan	Pacák	Gymnázium	19
5	Martin	Marec	Gymnázium Bruntál	17

# Obsah

Předmluva . . . . .	3
Zadání úloh . . . . .	4
Řešení teoretických úloh . . . . .	10
Řešení experimentálních úloh . . . . .	42
Seriál o kvantové fyzice . . . . .	52
Pořadí nejlepších řešitelů . . . . .	73
Obsah . . . . .	75



JAN HRADIL A KOLEKTIV

## Fyzikální korespondenční seminář

XI. ročník – 1997/98

*Předmluva:* Jan Hradil

*Autoři řešení úloh:*

Tomáš Drbohlav (II.1, V.3), Radek Erban (V.2),  
Jiří Franta (II.4, IV.2, VI.6), Jana Gřondilová (III.6, IV.6),  
Jan Hradil (III.3, III.5, VI.3), Michal Hvězda (I.6, II.6, III.5),  
Matouš Jiráček (V.6), Daniel Král (II.5, III.2, IV.4, V.1, VI.1),  
Přemysl Koloreň (I.4, IV.3), Martin Krsek (III.1),  
Jiří Libra (IV.1, V.4, VI.5), Václav Porod (I.2, III.4, IV.5, VI.4),  
Vladimír Slavík (I.5), David Stanovský (II.3),  
Rudolf Sýkora (I.2, III.4, IV.5, VI.4), Dalibor Šmíd (V.5, VI.2),  
Karel Výborný (I.3, II.2, III.1), Tibor Zavadil (I.1),

*Seriál na pokračování:* Michal Fabinger

*Sazba:* Petr Janeček

Vydala Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy  
Oddělení vnějších vztahů a propagace  
Ke Karlovu 3, 121 16 Praha 2  
Praha 1998

Vytisklo Reprografické středisko MFF UK  
Malostranské nám. 25, 118 00 Praha

78 stran, 60 obrázků  
Sazba písmem Computer Modern v programu L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  
Vydání první  
Náklad 250 výtisků

Jen pro potřeby fakulty