**11. ročník, úloha IV . S ... časový vývoj** *(6 bodů; průměr ?; řešilo 15 studentů)*

a) *Mějme dvě časově závislé vlnové funkce $\Psi_1(x,y,z,t)$ a $\Psi_2(x,y,z,t)$, které odpovídají stacionárním stavům s různými energiemi $E_1$ a $E_2$. Pokud budete chtít, můžete si dosazením do časové Schrödingerovy rovnice ověřit, že i jejich superpozice*

$$\Psi(x,y,z,t) = a\Psi_1(x,y,z,t) + b\Psi_2(x,y,z,t)\,, \quad a,b \in \mathbb{C}\,, \quad |a| + |b| \neq 0$$

*odpovídá časovému vývoji přípustné vlnové funkce. Vaším úkolem je ale něco jiného. Máte zjistit, za jakou dobu $T$ bude částice, která byla v čase $t = 0$ popsána funkcí $\Psi(x,y,z,0)$, opět ve stejném stavu. Jinak řečeno, najděte nejmenší možné $T > 0$, pro které je*

$$\Psi(x,y,z,T) = c\Psi(x,y,z,0)\,,$$

*kde $c$ je libovolné nenulové komplexní číslo.*

b) *Vypočtěte vlnovou délku fotonu o frekvenci, s jakou se mění stav (nikoli vlnová funkce!) elektronu v atomu vodíku, když je v superpozici jednoho stacionárního stavu na druhé a jednoho na třetí energetické hladině.*

a) Máme najít nejmenší možné $T > 0$, pro které existuje takové $c$, že ve všech bodech $(x,y,z)$ bude splněna rovnost

$$a\psi_1(x,y,z)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}E_1T}{\hbar}} + b\psi_2(x,y,z)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}E_2T}{\hbar}} = ca\psi_1(x,y,z) + cb\psi_2(x,y,z)\,.$$

V případě, že jedno z čísel $a$, $b$ bude nulové lze tuto relaci splnit pro libovolné $T$, pokud zvolíme

$$c = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}Et}{\hbar}}\,,$$

kde $E = E_1$ nebo $E = E_2$ podle toho, jestli $b = 0$ nebo $a = 0$. Systém zůstává pořád ve stejném stavu a hledat nejmenší možné $T > 0$ nemá smysl.

V případě, že jsou v superpozici skutečně zastoupeny oba stavy ($a \neq 0, b \neq 0$), vypadá situace jinak. Protože funkce $\psi_1$ a $\psi_2$ jsou lineárně nezávislé, musí být

$$c = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}E_1T}{\hbar}}\,, \qquad c = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}E_2T}{\hbar}}\,,$$

neboli

$$\cos\left(-\frac{E_1T}{\hbar}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{E_1T}{\hbar}\right) = \cos\left(-\frac{E_2T}{\hbar}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{E_2T}{\hbar}\right)\,.$$

Vidíme, že za dobu $T$ se musí relativní fáze obou vlnových funkcí změnit o $2k\pi$

$$\frac{E_1T}{\hbar} = \frac{E_2T}{\hbar} + 2k\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Minimální doba $T$, kterou hledáme, bude tedy rovna

$$T = \frac{2\pi\hbar}{|E_2 - E_1|}\,.$$

b) Energie elektronu na $n$-té hladině v atomu vodíku je

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2}\,,$$

takže s využitím výsledku předchozí části úlohy lehce zjistíme, že stav elektronu se mění s frekvencí

$$f = \frac{1}{T} = \frac{E_3 - E_2}{h} = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4}\right).$$

Foton se stejnou frekvencí bude mít vlnovou délku

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{288\varepsilon_0^2 h^3 c}{5 m_e e^4} \doteq 657\,\mathrm{nm}\,.$$

Jedná se přesně o vlnovou délku spektrální čáry, která odpovídá rozdílu energií příslušných hladin. Můžeme tedy uzavřít, že při přeskoku mezi energetickými hladinami vyšle elektron foton se stejnou frekvencí s jakou v mezistavu sám kmitá.

***Michal Fabinger***

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.