

11. ročník, úloha IV. E ... křídový prach (8 bodů; průměr ?; řešilo 38 studentů)

Změřte poloměr zrnka křídového prachu.

Pomůcka. Pro velmi jemný prach můžeme měřit dobu pádu prachu na zem a za pomoci Stokesova vzorce pro odpor prostředí můžeme poloměr dopočítat.

Teorie

Na padající zrnko křídového prachu působí tíhová síla a odporová síla vzduchu. Pokud tvar zrnka budeme považovat za kulový a obtékání zrnka vzduchem bude laminární, můžeme odporovou sílu vypočítat ze Stokesova vzorce $F_o = 6\pi r\eta v$, kde r je poloměr zrnka, v je jeho rychlost a η je dynamická viskozita vzduchu (pro 0°C je v tabulkách uvedena hodnota $\eta = 17,1 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}\cdot\text{s}$). Pohybová rovnice padajícího zrnka má tedy tvar

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho a = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - 6\pi r\eta v,$$

kde ρ je hustota křídý, g tíhové zrychlení a a zrychlení padajícího zrnka. Její integrací (pro počáteční podmínku $v_0 = 0$) dostaneme závislost rychlosti na čase

$$v = \frac{2r^2 \rho g}{9\eta} \left(1 - e^{-\frac{9\eta}{2r^2 \rho} t} \right). \quad (1)$$

Pokud je výraz v exponentu exponenciely $-9\eta/2r^2 \rho \cdot t$ dostatečně malý, pak již po velmi krátkém čase můžeme exponenciálu zanedbat a rychlost pádu bude konstantní (tíhová síla je v rovnováze s odporovou silou)

č. m.	t [s]
1	1,80
2	2,47
3	3,17
4	2,96
5	3,09
6	2,93
7	2,61
8	3,22
9	2,77
10	2,59
11	2,32
12	2,47
13	2,37
14	2,81
15	2,18
16	2,69

$$v = \frac{2r^2 \rho g}{9\eta}.$$

Padá-li zrnko touto rychlostí z výšky h a dopadne za čas t , snadno z předchozího vztahu vyjádříme poloměr zrnka

$$r = \sqrt{\frac{9h\eta}{2\rho g t}}. \quad (2)$$

Postup a výsledky měření

K měření jsem použila prach z bílé školní křídý, který jsem získala nastrouháním křídý o papír. Prach jsem nechala padat ze skříně výšky h a stopkami jsem měřila dobu pádu na podlahu. Naměřené hodnoty jsou v tabulce, statistickým zpracováním dostaneme průměrnou hodnotu s celkovou chybou měření $t = (2,6 \pm 0,5) \text{ s}$.

Výšku skříně jsem změřila pásovým měřidlem $h = (150,0 \pm 0,5) \text{ cm}$. Hustotu křídý jsem určila z tabulek $\rho = (2200 \pm 400) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, tíhové zrychlení $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Z (2) vypočítáme poloměr zrnka včetně chyby měření $r = (4,5 \pm 0,9) \cdot 10^{-5} \text{ m}$.

Závěr

Vidíme, že vzhledem k přesnosti měření můžeme zanedbat, že jsme při výpočtu použili hodnotu dynamické viskozity vzduchu při 0°C . Měli bychom také ověřit oprávněnost zanedbání členu s exponenciálou v (1). Po dosazení do exponentu dostáváme, že už v čase $t = 0,2\text{s}$ přispívá člen $\exp(-9\eta/2r^2\rho t)$ pouze hodnotou 0,03. Zrnka prachu nebyla stejně velká, na zem nedopadala všechna najednou, ale postupně. Snažila jsem se měřit dobu, ve které dopadlo na zem najednou nejvíce zrněk, takže jsem v podstatě určila poloměr zrněk, která byla v prachu nejvíce zastoupena. Navíc chyba měření je poměrně velká (asi 20 %) a kulový tvar zrněk je značně diskutabilní, takže výsledek měření bychom měli považovat za řádový odhad rozměru zrnka. Největší podíl na chybě měření má měření času a určení hustoty křídly (obě měrou asi 10 %).

Dodatek — nejčastěji se vyskytující chyby

Někteří z vás určili hustotu křídly změřením jejich rozměrů a zvážením. Hustota jim vyšla nižší, protože křída v sobě obsahuje vzduch (zkuste si ponořit kousek křídly do vody a uvidíte).

Neměli byste také zapomenout uvést, jaký druh křídly jste při měření použili a jakým způsobem jste připravili prach.

Jana Gřondilová