11. ročník, úloha IV . 2 ... *vodní hodiny* *(4 body; průměr ?; řešilo 53 studentů)*

Vodní hodiny jsou přesýpací hodiny, ve kterých se místo přesypávání písku přelévá voda. Navrhněte jejich tvar tak, aby hladina vody v horní nádobce klesala konstantní rychlostí. Vzduch je z nádobek vyčerpán.

Zdání úlohy lze splnit mnoha způsoby, uvedeme ten, který byl ve vašich řešeních nejčastější.

Označme obsah průřezu v nejužším místě S_0, plochu hladiny ve výšce h označme S. Rovnice kontinuity zní

$$S_0 v_0 = S v\,,$$

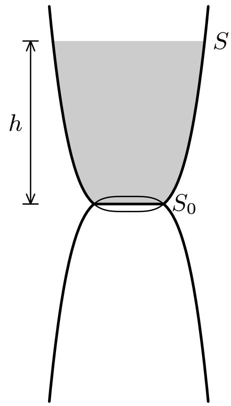
kde v_0 je rychlost výtoku vody v nejužším místě a v je rychlost poklesu hladiny (ta má být konstantní). Pro vyjádření závislosti výtokové rychlosti na výšce h využijeme Bernoulliho rovnici

$$h\varrho g + \frac{1}{2}\varrho v^2 = \frac{1}{2}\varrho v_0^2\,.$$

Po vykrácení hustoty ϱ dosadíme za v_0 z rovnice kontinuity

$$h = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{S^2}{S_0^2} - 1\right)\,.$$

Budeme dále předpokládat, že nádobky hodin mají rotačně symetrický tvar (jako většina přesýpaček), tedy $S = \pi r^2$, kde r je poloměr nádobky ve výšce h. Dosazením do předchozí rovnice dostaneme



Obr. 1

$$h = \frac{\pi^2 v^2}{2gS_0^2}\,r^4 - \frac{v^2}{2g}\,.$$

Z této rovnice je vidět, že nádobka hodin bude mít tvar, který vznikne rotací křivky čtvrtého stupně okolo osy y (viz obr. 1).

V úloze je možné provést v Bernoulliho rovnici zanedbání členu $\varrho v^2/2$ (v případě $v \ll v_0$), pak je $v_0 = \sqrt{2gh}$ a

$$h = \frac{\pi^2 v^2 r^4}{2gS_0^2}\,.$$

Tento výsledek přestává fungovat v případě, že v horní nádobce již nezbývá mnoho vody.

Při výpočtu jsme zanedbali jevy spojené s kapilaritou a viskozitou. Řešení úlohy by se tím poněkud zkomplikovalo.

Jiří Franta

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.