

11. ročník, úloha IV. 1 ... soutěž jehlanů (4 body; průměr ?; řešilo 54 studentů)

Vezmeme dva jehlany stejných rozměrů se čtvercovou podstavou o délce podstavné hrany a a výšce v . Kromě toho, že jejich rozměry jsou stejné, i jejich hmotnost je stejná. Jeden má drátěné hrany a druhý má plechové stěny. Postavíme je vedle sebe na podložku, kterou začneme naklánět. Který z modelů se dříve překloupí? Tření je tak velké, že jehlany po podložce nebudou klouzat.

Pokud budeme podložku naklánět, nejdříve se překloupí ten jehlan, který má těžiště výše. Protože jehlan je symetrický podle výšky, stačí vypočítat výšku těžiště nad podstavou. Nejdříve spočítáme výšku těžiště podstavu a pláště. Podstava má těžiště ve výšce $v_p = 0$. Plášť drátového modelu má těžiště v polovině výšky a plášť plechového modelu má těžiště v $\frac{1}{3}$ výšky, protože je složen z trojúhelníků.

Nyní musíme vypočítat hmotnost pláště a podstavu. Hmotnost modelu nechť je m . Potom hmotnost podstavu drátového modelu je (podle poměru délek drátu z nichž je složena podstava a celkové délky drátu) $m_{dp} = m4a/(4l + 4a)$, kde l je délka hrany pláště a a délka hrany podstavu. Hmotnost pláště je obdobně $m_{ppt} = m4l/(4l + 4a)$.

U plechového modelu vypočteme jednotlivé hmotnosti podle poměru jednotlivých ploch

$$m_{pp} = m \frac{a}{a + 2h},$$

$$m_{ppt} = m \frac{2h}{a + 2h},$$

kde h je výška stěny jehlanu.

Dále platí

$$l = \sqrt{\frac{a^2}{2} + v^2},$$

$$h = \sqrt{\frac{a^2}{4} + v^2},$$

kde v je výška jehlanu.

Známe tedy hmotnosti i výšky těžišť jednotlivých částí. Celková výška těžiště dvou částí se spočítá jako $(m_1y_1 + m_2y_2)/m$, kde y je výška těžiště nad podstavou. Po dosazení jsou výšky těžišť drátového a plechového modelu

$$y_d = \frac{v}{2} \frac{\sqrt{\frac{a^2}{2} + v^2}}{a + \sqrt{\frac{a^2}{2} + v^2}}, \quad (1)$$

$$y_p = \frac{v}{3} \frac{\sqrt{\frac{a^2}{4} + v^2}}{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + v^2}}. \quad (2)$$

Nyní stačí porovnat tyto dva výrazy. Přímou se to nepodaří, neboť vznikne rovnice příliš vysokého řádu, než bychom byli schopni ji vyřešit. Proto použijeme fintu. Předpokládáme, že výraz (1) je větší než (2). Pokud zvětšíme výraz (2) na

$$y_p = \frac{v}{3} \frac{\sqrt{\frac{a^2}{2} + v^2}}{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{2} + v^2}} \quad (3)$$

a dokážeme, že (3) je stále menší než (1), pak jsme zároveň dokázali, že (1) je větší než (2). Porovnat výrazy (1) a (3) už není problém, pokud využijeme toho, že veškeré proměnné mohou nabývat pouze kladných hodnot. Těžiště má tedy výše jehlan drátěný, proto se překlopí dříve.

Někteří řešitelé zapomněli, že rozhodující je výška těžiště a porovnávali pouze vedlejší vlivy, jako je přilnavost k podložce nebo působení částic podložky na podstavu jehlanu. Tyto vlivy by se uplatnily pouze tehdy, kdyby těžiště obou modelů byla stejně vysoko, ovšem v tomto případě mají zanedbatelný význam.

Jiří Libra